## Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit

$$c(n_0) := 1 - \frac{1}{2} \sup_{i,j} \sum_m |p_{im}(n_0) - p_{jm}(n_0)|$$

Für $n \geq n_0$ gilt:

$$c(n) > 0.$$

**Satz 5.6** *Sei $c(n_0) > 0$ für ein gewisses $n_0$. dann existiert*

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = p_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

*und es gilt für alle Anfangsverteilungen $\{p_j^0\}$:*

$$|p_j(n) - p_j| \leq C \cdot e^{-Dn},$$

*wobei*

$$C = \frac{1}{1 - c(n_0)}, \quad D = \frac{1}{n_0} \ln \frac{1}{1 - c(n_o)}$$

**Beweis:** Rosanov, Zufällige Prozesse □

$$p_j(n) = P(X_n = j) = \sum_i p_i^0 p_{ij}(n)$$

**Bsp. 5.8 Ein-Prozessorsystem mit mehreren E/A-Einheiten.**

*Ein Programm. das sich in der CPU befindet, geht mit Wkt. $q_i$ in die I/O-Einheit $i$ über, oder endet (mit Wkt. $q_0$) und macht Platz für ein neues Programm in der CPU.*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & \ldots & q_m \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ .. & & & \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} q_0^2 + \sum_{i=1}^m q_i & q_0 q_1 & \ldots & q_0 q_m \\ q_0 & q_1 & \ldots & q_m \\ .. & & & \\ q_0 & q_1 & \ldots & q_m \end{pmatrix}$$

*also* $p_{ij}(2) > 0 \quad \forall i, j \Longrightarrow \{X_t\}$ *irreduzibel.*

$$(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m) \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \pi_0 q_0 + \sum_{i=1}^m \pi_i \\ \\ \pi_0 q_1 \\ \\ .. \\ \\ \pi_0 q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \\ \pi_1 \\ \\ .. \\ \\ \pi_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} q_0\pi_0 + 1 - \pi_0 &= \pi_0 \\ 2\pi_0 - q_0\pi_0 &= 1 \\ \pi_0(2 - q_0) &= 1 \\ \pi_0 &= \frac{1}{2 - q_0} \\ \pi_i &= \pi_0 q_i = \frac{q_i}{2 - q_0}, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^m \pi_i = \frac{1}{2 - q_0} + \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{2 - q_0} = \frac{1 - q_0}{2 - q_0} + \frac{1}{2 - q_0} = 1.$$

**Bsp. 5.9 (Multiprozessorsystem)**

*Ein "Job" (oder ein Prozessor) greift zufällig auf bestimmte Speichermodule zu.*

*Er wird bedient, wenn der angeforderte Speichermodul frei ist, sonst muß er warten.*

*Die Zeit für einen Speicherzugriff sei konstant und für alle Speichermodule gleich.*

*Neue Anforderungen beginnen sofort nach Abarbeitung der alten.*

$m$ *"Jobs",* $n$ *Speichermodule.*

$N_i$*: Anzahl der "Jobs" (Wartenden) am Speichermodul* $M_i$ *(Bedienplätze) (wartend oder in Arbeit),* $i = 1, \ldots, n$

*Zustandsraum*

$$S = \{(N_1, N_2, \ldots, N_n) \in \mathbb{Z}^+ : \sum_i N_i = m\}$$

*Bsp.:* $m = n = 2$: $S = \{(1,1),(0,2),(2,0)\}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2q_1q_2 & q_2^2 & q_1^2 \\ q_1 & q_2 & 0 \\ q_2 & 0 & q_1 \end{pmatrix}$$

*Stationäre Verteilung:*

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{M} = \boldsymbol{\pi}$$

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 2q_1q_2 & q_2^2 & q_1^2 \\ q_1 & q_2 & 0 \\ q_2 & 0 & q_1 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

$$\begin{aligned} \pi_1 \cdot 2q_1q_2 + \pi_2 q_1 + \pi_3 q_2 &= \pi_1 \\ \pi_1 \cdot q_2^2 + \pi_2 \cdot q_2 + \pi_3 \cdot 0 &= \pi_2 \\ \pi_1 \cdot q_1^2 + \pi_2 \cdot 0 + \pi_3 \cdot q_1 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 \cdot q_2^2 &= \pi_2(1 - q_2) \\ \pi_1 \cdot q_1^2 &= \pi_3(1 - q_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\pi_2 &= \frac{q_2^2}{1-q_2}\cdot\pi_1 \\
\pi_3 &= \frac{q_1^2}{1-q_1}\cdot\pi_1 \\
\pi_1 &= \frac{1}{1+\frac{q_1^2}{1-q_1}+\frac{q_2^2}{1-q_2}} = \frac{q_1q_2}{1-2q_1q_2}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{B}$ : *Anzahl der erledigten Speicherplatz-Anforderungen/Zyklus im stationären Zustand:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{B}|(1,1)) &= 2 \\
\mathbf{E}(\mathbf{B}|(2,0)) &= 1 \\
\mathbf{E}(\mathbf{B}|(0,2)) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{EB} &= 2\cdot\pi_1 + 1\cdot\pi_2 + 1\cdot\pi_3 \\
&= \Big(2+\frac{q_1^2}{1-q_1}+\frac{q_2^2}{1-q_2}\Big)\pi_1 \\
&= \frac{1-q_1q_2}{1-2q_1q_2}
\end{aligned}
$$

$q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$: $\quad \mathbf{EB} = \frac{3}{2}$.

maximal möglicher Wert.

**Bsp. 5.10** *Das Betriebssystem schalte zwischen folgenden Zuständen:*

*1: Benutzerprogramm aktiv*

*2: Scheduler aktiv*

*3: Operatorkommunikation aktiv*

*4: Nullprozess*

$$M = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.04 & 0.05 & 0.01 \\ 0.94 & 0.00 & 0.05 & 0.01 \\ 0.85 & 0.10 & 0.04 & 0.01 \\ 0.75 & 0.00 & 0.05 & 0.20 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\pi} = (0.897, 0.041, 0.05, 0.012)$ ***ist stationäre Verteilung. (ÜA)***