2 Klassifikation der Zustände

Def. 5.4 *Ein Zustand j heißt vom Zustand i aus erreichbar, wenn es eine Zahl n gibt, so daß gilt: $p_{ij}(n) > 0$. Wir schreiben: $i \longrightarrow j$.*

Def. 5.5 *Zwei Zustände i und j kommunizieren, wenn gilt: $i \longrightarrow j$ und $j \longrightarrow i$. Wir schreiben dann: $i \longleftrightarrow j$.*

Die Relation „$\longleftrightarrow$“ ist eine Äquivalenzrelation:

1. Sie ist **reflexiv**.

   Es gilt: $i \longleftrightarrow i$ wegen $p_{ii}(0) = 1$.

2. Sie ist **symmetrisch**.

   Aus $i \longleftrightarrow j$ folgt $j \longleftrightarrow i$. Das sagt bereits die Definition der Relation aus.

3. Sie ist **transitiv**.

   Es gelte $i \longleftrightarrow j$ und $j \longleftrightarrow k$. D.h. es existieren Zahlen $m, n \geq 0$, so daß gilt:

   $$p_{ij}(m) > 0, \quad p_{jk}(n) > 0.$$

   Dann können wir mit Hilfe der Rekursion von CHAPMAN–KOLMOGOROFF folgendes herleiten:

   $$\begin{aligned} p_{ik}(m+n) &= \sum_{l \in S} p_{il}(m) \cdot p_{lk}(n) \\ &\geq p_{ij}(m) \cdot p_{jk}(n) \\ &> 0 \end{aligned}$$

   Nach $m + n$ Schritten erreicht man folglich vom Zustand i aus den Zustand k. Es gilt also: $i \longrightarrow k$. Mit Hilfe der Symmetrieeigenschaft der Relation „$\longleftrightarrow$“, angewendet auf die Voraussetzung, können wir folgern, daß auch $k \longrightarrow i$ gilt.

Folg. 10 *Es sei S der Zustandsraum einer* MARKOFF*'schen Kette. Es gibt eine Zerlegung von S in Äquivalenzklassen bzgl. der Relation „$\longleftrightarrow$“.*

Die kommunizierenden Zustände lassen sich weiter unterteilen.

Def. 5.6 *Gibt es für einen Zustand i einen Zustand j und eine Zahl $n \geq 0$, so daß*

$$p_{ij}(n) > 0, \text{ \textit{aber} } p_{ji}(m) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

gilt, so heißt i unwesentlicher oder auch vorübergehender Zustand.
Andernfalls heißt i wesentlicher Zustand.

Bsp. 5.2 *Wir betrachten den Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Eine* MARKOFF*'sche Kette auf diesem Zustandsraum habe die folgende Übergangsmatrix M:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Zustände 1 und 2 sind hier unwesentliche Zustände. Für den Zustand 1 existiert der Zustand 3, für den gilt, *daß* $p_{13}(1) = \frac{1}{2} > 0$ *ist. Eine Zahl* m*, für die* $p_{31}(m) > 0$ *gilt, läßt sich jedoch nicht finden. Wenn wir den Zustand* 2 *mit dem Zustand* 4 *betrachten, kommen wir zu einem ähnlichen Ergebnis.*

Die Zustände 3 *und* 4 *sind dagegen wesentlich.*

An der Matrix $\mathbf{M}$ *läßt sich das in diesem Fall alles ablesen.*

Die Elemente des Zustandsraumes sind in diesem Beispiel bereits so sortiert, daß die unwesentlichen Zustände vorn stehen. Wir sehen, daß in der Matrix in den ersten beiden Spalten im unteren Bereich nur noch Nullen stehen. Man sollte sich folgendes klarmachen: Diese Nullen zeigen, daß man aus den durch die Zeilennummern der Nullen bezeichneten Zuständen nicht mehr in die Zustände, die durch die betreffenden Spaltennummern gekennzeichnet werden, zurückkehren kann.

Verallgemeinerung: Durch eine geeignete Numerierung der Zustände kann die Übergangsmatrix M einer MARKOFF'schen Kette wie in der

Abbildung

dargestellt werden.

Dabei sind die s_i die Zustandsklassen, in die der Zustandsraum S bzgl. der Äquivalenzrelation „$\longleftrightarrow$" zerlegt werden kann. s_0 ist die Klasse der unwesentlichen Zustände, die s_i $(i \geq 1)$ sind die Klassen der wesentlichen Zustände. Die schraffierten Felder sind Teilmatrizen der Matrix M, die mit Übergangswahrscheinlichkeiten bestzt sind. Man sieht auch, daß Übergänge nur innerhalb einer Zustandsklasse möglich sind.

Def. 5.7 *Besteht eine Äquivalenzklasse s_i bzgl. „$\longleftrightarrow$" nur aus einem einzigen Zustand ($s_i = \{j_i\}$), so heißt dieser Zustand absorbierender Zustand.*

Def. 5.8 *Eine* MARKOFF*'sche Kette heißt* *irreduzibel* *oder* *unzerlegbar, wenn der Zustandsraum* S *aus genau einer Klasse wesentlicher Zustände besteht.*

Bsp. 5.3 $S = \{1, 2\}$, *Übergangsmatrix:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_n \quad \forall n \geq 1.$$

$\{X_t\}$ *ist reduzibel!* *Zustand 1 ist absorbierend!!*

$\{1\}$ *ist die einzige Äquivalenzklasse.*

Bsp. 5.4 $S = \{1, 2, 3\}$, *Übergangsmatrix:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{19}{48} & \frac{11}{48} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{36} & \frac{19}{36} \end{pmatrix}$$

$p_{ij}(2) > 0 \quad \forall i, j \in S$.
$\{X_t\}$ *ist irreduzibel! Offensichtlich kommunizieren hier alle drei Zustände miteinander.*

3 Rekurrente und transiente Zustände

Für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit

$$f_i(n) = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i, X_0 = i)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Schritten erstmalig wieder der Zustand i erreicht wird. Es gilt:

$$f_i(0) = 0 \text{ und } f_i(1) = p_{ii}.$$

Sei i fest und seien $\quad \forall k = 1, \ldots, n$

$$B_k = \{X_k = i, X_\nu \neq i \quad \forall \nu = 1, \ldots, k-1 | X_0 = i\}$$

$B_{n+1} = \{$System befand sich während der ersten n Schritte nie im Zustand $i\}$.

Offenbar

$$\bigcup_{l=1}^{n+1} B_l = \Omega, \qquad B_l \cap B_{l'} = \emptyset \quad (l \neq l').$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
p_{ii}(n) &= P(X_n = i|X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} P(X_n = i|B_k) \cdot P(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_i(k) p_{ii}(n-k) + P(X_n = i|B_{n+1}) \cdot P(B_{n+1})
\end{aligned}$$

Wegen $P(X_n = i|B_{n+1}) = 0$ folgt

$$p_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \qquad (n \geq 1).$$

Damit läßt sich $f_i(k)$ rekursiv berechnen:

$$\begin{aligned}
f_i(0) &= 0, \qquad f_i(1) = p_{ii} \\
p_{ii}(2) &= f_i(1) \cdot p_{ii}(1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(0) \\
&= p_{ii}^2 + f_i(2) \\
f_i(2) &= p_{ii}(2) - p_{ii}^2 \\
\Big(p_{ii}(2) &= \sum_k p_{ik} p_{ki} \geq p_{ii}^2\Big).
\end{aligned}$$

Wir führen noch eine weitere Bezeichnung ein:

$$F_i := \sum_{j=1}^{\infty} f_i(j)$$

sei die Wahrscheinlichkeit, daß man irgendwann in den Zustand i zurückkehrt.

Def. 5.9 *Ein Zustand $i \in S$ heißt <u>rekurrent</u>, wenn $F_i = 1$ gilt. Ist dagegen $F_i < 1$, so heißt er <u>transient</u>.*

Satz 5.1 *Zustand i rekurrent $\Rightarrow$ er wird unendlich oft erreicht mit Wkt. 1.*

Zustand i transient $\Rightarrow$ er kann höchstens endlich oft erreicht werden.

Beweis: Sei $r_i(k)$ die Wkt., dass die MK mindestens k mal nach i zurückkehrt.

$$\begin{aligned}
r_i(k) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\big(k-1 \text{ mal zurück} \mid \text{das erste mal nach } n \text{ Schritten zurück}\big) \\
&\qquad P\big(\text{nach } n \text{ Schritten das erste Mal nach } i \text{ zurück}\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) r_i(k-1) \\
&= r_i(k-1) \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) \\
&= r_i(k-1) F_i \\
\Rightarrow r_i(k) &= F_i^k
\end{aligned}$$

Ist i rekurrent, also $F_i = 1$, dann ist $r_i(k) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Sei i transient, d.h. $F_i < 1$.

Sei Z_i die Anzahl der Besuche in i.

$$P(Z_i = k) = F_i^k(1 - F_i)$$

geometrische Verteilung mit Parameter $(1 - F_i)$.

$$\mathbf{E}Z_i = \frac{1}{1 - F_i} < \infty$$

Satz 5.2 *Ein Zustand i ist genau dann rekurrent, wenn gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$.*

Er ist genau dann transient, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$ ist.

Beweis: (für einen anderen Beweis siehe z.B. Mathar/Pfeifer, Satz 3.2.1).

Erinnerung:

$$p_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \qquad (n \geq 1)$$

Multiplizieren diese Gleichung mit z^n und summieren über n:

$$
\begin{aligned}
P_i(z) &:= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \Bigg(\sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \Bigg) \\
&= \quad z f_i(1) \cdot p_{ii}(1-1) \\
&\quad + z^2 \big(f_i(1) \cdot p_{ii}(2-1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(2-2) \big) \\
&\quad + z^3 \big(f_i(1) \cdot p_{ii}(3-1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(3-2) + f_i(3) \cdot p_{ii}(3 - \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + z^n \big(f_i(1) \cdot p_{ii}(n-1) + \ldots + f_i(n) \cdot p_{ii}(0) \big) \\
&\quad + \ldots \\
&= \quad z f_i(1) \Bigg(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} p_{ii}(\nu) \Bigg) \\
&\quad + z^2 f_i(2) \Bigg(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} p_{ii}(\nu) \Bigg) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + z^n f_i(n) \Bigg(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} p_{ii}(\nu) \Bigg) \\
&\quad + \ldots \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} f_i(\nu) \cdot \big(1 + P_i(z) \big) \\
&= F_i(z) \cdot \big(1 + P_i(z) \big)
\end{aligned}
$$

wobei

$$F_i(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu f_i(\nu).$$

Die Fkt. $F_i(z)$ und $P_i(z)$ sind analytisch für $|z| < 1$.

$$F_i(z) = \frac{P_i(z)}{1 + P_i(z)}, \quad P_i(z) = \frac{F_i(z)}{1 - F_i(z)}$$

$$\lim_{z \to 1} F_i(z) = F_i(1) = F_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_i(\nu)$$

ist die Wkt. für eine Rückkehr nach i. Sei

$$\lim_{z \to 1} P_i(z) = P_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$$

Daraus folgt

$$F_i = \lim_{z \to 1} \frac{P_i(z)}{1 + P_i(z)} = 1,$$

d.h. i ist rekurrent.

Sei umgekehrt $F_i = 1$. Dann folgt

$$P_i = \lim_{z \to 1} P_i(z) = \frac{1}{1 - \lim_{z \to 1} F_i(z)} = \infty.$$

Der zweite Teil des Satzes ist die Kontraposition des ersten Teils. $\square$

Folg. 11 *Sei i transient. dann*

$$F_i = \frac{P_i}{1+P_i} < 1.$$

Diese beiden Aussagen können zum Beweis des folgenden Lemmas verwendet werden.

Lemma 5.3 *Ist ein Zustand i rekurrent (transient) und kommuniziert er mit einem Zustand j ($i \longleftrightarrow j$), so ist auch der Zustand j rekurrent (transient).*

Beweis: 1. Sei $i \longleftrightarrow j$. Dann existieren $m, k > 0$: $p_{ij}(k) > 0$ und $p_{ji}(m) > 0$. Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} p_{jj}(m+n+k) &= \sum_l \Big(\sum_{k'} p_{jk'}(m) p_{k'l}(n)\Big) p_{lj}(k) \\ &= \sum_l p_{jl}(m+n) p_{lj}(k) \\ &\geq p_{ji}(m) p_{ii}(n) p_{ij}(k) \qquad (l = i). \end{aligned}$$

Daraus folgt (da i rekurrent)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(m+n+k) \geq p_{ji}(m) p_{ij}(k) \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

2. Sei $i \longleftrightarrow j$. und i transient. Ang, j wäre rekurrent, dann wäre nach 1. auch i rekurrent. Wid.

$\square$

Folg. 12 *Eine irreduzible* MARKOFF*'sche Kette mit endlich vielen Zuständen hat nur rekurrente Zustände.*

Beweis: Mindestens ein Zustand muß rekurrent sein. Da alle Zustände miteinander kommunizieren, sind alle Zustände rekurrent. $\square$

Bsp. 5.5 (Random walk, eindim. Fall) *Der Zustandsraum ist $S = \mathbb{Z}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind*

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &:= p \\ p_{i,i-1} &:= 1-p \\ p_{ij} &:= 0, \quad \textit{falls } |i-j| \neq 1. \end{aligned}$$

D.h. Übergänge zwischen Zuständen, die einen Abstand ungleich Eins zueinander haben, sind nicht möglich. Die

Übergangsmatrix $\mathbf{M}$ hat folgende Gestalt:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & 1-p & 0 & p & \dots \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Offenbar kommunizieren alle Zustände miteinander. Ist somit ein Zustand rekurrent, so sind es alle. Und umgekehrt.

Es genügt also zu untersuchen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n).$$

Dazu siehe den Abschnitt Irrfahrten!

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = \infty$, wenn $p = \frac{1}{2}$.

Bsp. 5.6 (Random walk, zwei- und dreidim. Fall) *Im zweidimensionalen Fall haben wir in jedem Zustand vier mögliche Übergänge, denen die Wahrscheinlichkeiten* p_1, p_2, p_3 *und* p_4 *zugeordnet werden. DieZustände sind rekurrent, wenn* $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$ *gilt.*

Im dreidimensionalen Fall sind in jedem Punkt im dreidimensionalen ganzzahligen Gitter sechs Übergänge möglich. Auch wenn $p_1 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$*, so sind alle Zustände transient.*

Dazu siehe den Abschnitt Irrfahrten!

(die folgenden beiden Seiten können überlesen werden.)

Sei jetzt der Zustand i Startzustand (fest) und

$Y_1 = \#$ Schritte bis zur ersten Rückkehr nach i

$Y_2 = \#$ Schritte bis zur zweiten Rückkehr

$Y_k = \#$ Schritte bis zur k-ten Rückkehr

$$P(Y_1 < \infty) = F_i$$

$$Y_1 = \infty \Longrightarrow Y_2 = \infty, \text{d.h.} \quad \{Y_1 = \infty\} \subseteq \{Y_2 = \infty\}$$

$$\Longrightarrow P(Y_2 < \infty | Y_1 < \infty) = F_i$$

$$\begin{aligned} P(Y_2 < \infty) &= P(Y_2 < \infty | Y_1 < \infty) \cdot P(Y_1 < \infty) \\ &= F_i^2 \\ P(Y_k < \infty) &= F_i^k \end{aligned}$$

Sei jetzt $F_i < 1. \Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(Y_k < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} F_i^k < \infty$$

Folg. 13 *i transient $\Longrightarrow$ nach unendlich vielen Schritten tritt i höchstens endlich oft mit Wkt. 1 ein.*

Beweis: Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty \Longrightarrow P(\limsup A_n) = 0.$$

Mit $A_k = \{Y_k < \infty\}$, $\quad B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k \downarrow$ folgt

$$0 = P(\limsup A_n) = P(\lim B_n) = \lim P(B_n) = P(B)$$

$$\begin{aligned} B &= \{\text{unendlich viele der } A_k, k = 1, 2, \ldots, \text{treten ein}\} \\ \overline{B} &= \{\text{endlich viele der} A_k, k = 1, 2, \ldots, \text{treten ein}\} \end{aligned}$$

$$P(\overline{B}) = 1$$

$\square$

Folg. 14 *Sei jetzt i rekurrent, d.h. $F_i = 1$. $\Longrightarrow$ i wird unendlich oft erreicht.*

Beweis: Für beliebiges k gilt: $P(Y_k < \infty) = 1$.

$Y = \#$ der Rückkehren nach i bei unendlich vielen Schritten.

$$\{Y_k < \infty\} \Leftrightarrow \{Y \geq k\}$$

$$P(Y = \infty) = \lim_{k\to\infty} P(Y \geq k) = \lim_{k\to\infty} P(Y_k < \infty) = 1.$$

$\square$

Korrektur zur Lösung der Übungsaufgabe 38c)

Seien

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Person } i \text{ steigt in den ersten Zug ein} \\ 0 & \text{Person } i \text{ steigt in den zweiten Zug ein} \end{cases}$$

und

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

die Anzahl der Personen in Zug 1.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in keinem der beiden Züge stehen muss ist

$$\begin{aligned} P(490 \leq S \leq 537) &= P(\frac{490-500}{\sqrt{250}} \leq \frac{S-500}{\sqrt{250}} \leq \frac{537-500}{\sqrt{250}}) \\ &\approx \Phi(2.33) - \Phi(-0.635) \\ &\approx 0.99 - 0.264 \\ &\approx 0.726 \end{aligned}$$