Kompositionsmethode

Sei F eine Linearkombination von mehreren Verteilungsfunktionen F_i,

$$F = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i F_i$$

Algorithmus:

Erzeuge gleichverteilte Zufallszahl U,
falls $U \in [\sum_{j=1}^{i-1} \epsilon_j, \sum_{j=1}^{i} \epsilon_j)$ simuliere aus F_i.

Beispiele:

Kontaminierte Normalverteilung

$$F(x) = (1-\epsilon)\Phi\Big(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\Big) + \epsilon\Phi\Big(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\Big)$$

Doppelexponential (Laplace)

$X_1 \sim exp(\lambda)$

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{falls} \quad U \leq \frac{1}{2} \\ -X_1 & \text{falls} \quad U > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Verwerfungsmethode (Acceptance Sampling)

F habe Dichte f, aber die Zufallszahlen seien schwierig direkt zu erzeugen.

Erzeugung von Zufallszahlen mit der Dichte g sei “leicht”.

$$M := \sup_x \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

Algorithmus:

1. Simuliere $U \sim R(0,1)$
2. Simuliere $Y \sim g$
3. Akzeptiere $X = Y$, falls $U \leq \frac{1}{M}\frac{f(Y)}{g(Y)}$

sonst gehe nach 1.(neuer Versuch)

$$\begin{aligned}
P(Y \text{akzeptiert}) &= P\left(U \leq \frac{1}{M}\frac{f(Y)}{g(Y)}\right) \\
&= \int P\left(U \leq \frac{1}{M}\frac{f(Y)}{g(Y)} \big| Y = y\right) g(y)\, dy \\
&= \int \frac{1}{M}\frac{f(y)}{g(y)} \cdot g(y)\, dy = \frac{1}{M}.
\end{aligned}$$

(Integration über den Definitionsbereich von Y)

Im Mittel müssen also M Zufallszahlen Y erzeugt werden.

Die Methode ist korrekt, denn:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq x | Y \text{akzeptiert}) &= \int_{-\infty}^{x} P(Y = y | Y \text{akzeptiert}) g(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{P(Y \text{akzeptiert}, Y = y)}{P(Y \text{akzeptiert})} g(y)\, dy \\
&= \int \frac{P\left(U \leq \frac{1}{M}\frac{f(y)}{g(y)}\right)}{P(Y \text{akzeptiert})}\, g(y)\, dy \\
&= M \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{M}\frac{f(y)}{g(y)} g(y)\, dy \\
&= F(x).
\end{aligned}
$$

Bsp. 4.7

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \textit{(Normal)}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad \textit{(Doppelexp)}$$

$$\sup_x \frac{f(x)}{g(x)} = \sup_x \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2+|x|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_x e^{(-x^2+2|x|-1+1)/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{1/2} \sup_{x, x \geq 0} e^{-(x-1)^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{1/2} \approx 1.315.$$

`Verwerfungsmethode.sas`

Erzeugung von zwei beliebig abhängigen Zufallsgrößen

Es seien X und Y zwei unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsgrößen ($X, Y \sim \mathrm{N}(0,1)$), die wie in Abschnitt 4.2 erzeugt wurden. Wir definieren zwei weitere Zufallsgrößen X^* und Y^* wie folgt:

$$\begin{aligned} X^* &:= X \\ Y^* &:= \varrho \cdot X + \sqrt{1-\varrho^2} \cdot Y \qquad (\varrho \in [0,1]) \end{aligned}$$

Beh.: ϱ ist der gewünschte Korrelationskoeffizient zwischen X^* und Y^*. **Beweis:** ÜA.

Ist $\varrho = 1$, dann gilt $Y^* = X^* = X$, d.h. die beiden Zufallsgrößen sind identisch. Wird $\varrho = 0$ gewählt, so sind beide Zufallsvariablen unabhängig.

4.3 Weitere Simulationen

Simulation einer Markoff'schen Kette

gegeben: Zustandsraum: $S = \{1, 2, \ldots\}$

Anfangsverteilung: $\{p_j^0\}_{j=1,2\ldots}$, $\quad (p_0^0 = 0)$

Übergangsmatrix:

$$\left(p_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\ldots\\ j=1,2,\ldots}}$$

1. Schritt: Erzeuge eine Pseudozufallszahl U_0. Falls

$$\sum_{k=0}^{i-1} p_k^0 \leq U_0 < \sum_{k=0}^{i} p_k^0$$

so starte im Zustand "i".

n-ter Schritt: Im $n-1$ten Schritt sei der Zustand "i" erreicht worden. Erzeuge eine Pseudozufallszahl U_n. Falls

$$\sum_{k=0}^{j-1} p_{ik} \leq U_n < \sum_{k=0}^{j} p_{ik}$$

so gehe in den Zustand "j".

Das Buffonsche Nadelproblem (1777)

In der Ebene seien zwei parallele Geraden im Abstand a gezogen.

Auf die Ebene wird zufällig eine Nadel der Länge l, $l \leq a)$ geworfen.

Frage: Wie groß ist die Wkt., daß die Nadel eine der Geraden schneidet?

Was heißt Nadel zufällig werfen?

X: Abstand des Nadelmittelpunkts von der nächstgelegenen Geraden, $0 \leq X \leq \frac{a}{2}$.

ϕ: Winkel zwischen Nadel und Geraden, $0 < \phi \leq \pi$.

Nadel zufällig werfen:

$$X \sim R(0, \frac{a}{2}), \qquad \phi \sim R(0, \pi).$$

Wann schneidet die Nadel eine Parallele? gdw.

$$X \leq \frac{l}{2} \sin \phi$$

gdw. der Punkt (ϕ, X) unterhalb des Sinusbogens liegt.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\text{Fläche unterhalb des Sinunbogens}}{\text{Fläche des Rechtecks}[0,\pi]\text{x}[0,\frac{a}{2}]} \\
&= \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \sin\phi \, d\phi}{\pi \cdot \frac{a}{2}} \\
&= \frac{2l}{\pi a}
\end{aligned}$$

Insbesondere: $a = 2l$:

$$P = \frac{1}{\pi}.$$

Schätzung für π:

$$\hat{\pi} = \frac{\#\text{Würfe}}{\#\text{Treffer}}$$

*Simulation von auf der n-dimensionalen Kugeloberfläche gleichverteilten Zufallsvariablen

Satz 4.8 *Seien* $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$*, i.i.d.* $\quad i = 1, \ldots, n,$ $\quad$ *und*

$$Y_i = \frac{X_i}{R}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Dann gilt

$$Y_i \sim R(K_n^O(0,1)),$$

wobei $K_n^O(0,1)$ *die Oberläche der* n*-dimensionalen Einheitskugel ist.*

Beweis: Wir betrachten die Transformation

$$G : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow K_{n-1}(0,1) \times \mathbb{R}^+$$

wobei $K_{n-1}(0,1)$ die $n-1$ dimensionale Einheitsvollkugel ist.

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{x_2}{r} \\ &\ldots \\ y_n &= \frac{x_n}{r} \\ r &= r \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist injektiv und es gilt für G^{-1}:

$$\begin{aligned} x_2 &= r \cdot y_2 \\ &\ldots \\ x_n &= r \cdot y_n \\ r &= r \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$J := \frac{\partial G^{-1}(y_2, \ldots, y_n, r)}{\partial(y_2, \ldots, y_n, r)} = \begin{pmatrix} r & 0 & \ldots 0 & y_2 \\ 0 & r & \ldots 0 & y_3 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots r & y_n \\ 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also: $\det J = r^{n-1}$.

Die gemeinsame Dichte von $(\mathbf{Y}, R) = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, R)$ ist dann

$$f_{\mathbf{Y},R}(y_1, \ldots, y_n, r)$$

$$= \begin{cases} f_{\mathbf{X},R}(ry_1, G^{-1}(y_2, \ldots, y_n, r)) \cdot \det J, & y_1^2 = 1 - \sum_{j=2}^n y_j^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{r^2 y_j^2}{2}} \cdot r^{n-1}, & y_n^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r^{n-1} & \text{falls} \quad y_n^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Zufallsvektoren $(Y_1, \ldots, Y_n)$ und R sind also unabhängig und wegen

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r^{n-1}}{(2\pi)^{n/2}} &= \frac{r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \\ &= f_{\chi_n}(r) \cdot \frac{1}{A_{K_n^O(0,1)}} \end{aligned}$$

ist

$$R \sim \chi_n \quad \text{und} \quad \mathbf{Y} \sim R(K_n^O(0,1))$$

mit der Dichte

$$\frac{1}{A_{K_n^O(0,1)}}$$

wobei

$$A_{K_n^O(0,1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

die Fläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

$\square$

Bem.: Die Fläche der n-dimensionalen Kugeloberfläche ist, vgl. Fichtenholz 3, S.389,

$$A_{K_n^O(0,r)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

$n = 2$: $2\pi r$

$n = 3$: $4\pi r^2$ $\quad \left(\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

$n = 4$: $4\pi^2 r^3$

Kapitel 5

Markoff'sche Ketten

Contents

Beispiele

Irrfahrten (auf der Geraden, der Ebene, im Raum)

Ruin des Spielers

Markov Chain Monte Carlo (z.B. Simulated Annealing)

Fragestellungen

Rückkehrwktn., Absorptionswktn.

Erste Rückkehr

Stationäre Verteilungen

1 Definitionen und einfache Zusammenhänge

$\{X_t\}_{t\in T}$: Famile von Zufallsgrößen.

T: total geordnete Menge (mit kleinstem Element t_0).

T endlich, o.B.d.A. $T = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ oder

T abzählber, o.B.d.A. $T \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$

Wir betrachten ein System, das aus einem Anfangszustand für $t = t_0$ schrittweise übergeht in Zustände für $t = t_1, t = t_2, \ldots$.

Menge der Zustände: Zustandsraum S,

$S = \{1, 2, \ldots, m\}$ oder $S = \mathbb{N}$ oder $S = \mathbb{Z}$.

Für jedes t wird der (aktuelle) Zustand durch eine Zufallsvariable X_t beschrieben,

$$P(X_t \in S) = 1, \qquad F_t(x) := P(X_t < x)$$

Def. 5.1 *Es sei T, $T \subseteq \mathbb{Z}^+$, eine abzählbare Menge und S, $S \subseteq \mathbb{Z}$ (Zustandsraum) eine höchstens abzählbare Menge. Die Elemente von S nennen wir Zustände. Es sei nun $\{X_t\}_{t\in T}$ eine Familie von zufälligen Größen, für die gelte:*

$$P(X_t \in S) = 1, \quad \forall t \in T.$$

Diese Familie von Zufallsgrößen heißt MARKOFF'sche Kette, falls gilt:

$$P(X_{t+1} = j | \, X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j | \, X_t = i) =: p_{ij}^{(t)}.$$

Die Anfangsverteilung der MARKOFF'schen Kette bezeichnen wir mit $p_i^{(0)} = P(X_0 = i)$.

Bem.: Wir stellen uns also vor, daß wir, beginnend im Zustand i_0, über die Zustände $i_1, \ldots, i_{t-1}$ in den Zustand i gelangt sind und nun in einen weiteren Zustand übergehen wollen. Eine Familie von Zufallsgrößen ist eine MARKOFF'sche Kette, wenn für den Übergang in diesen Zustand nur der unmittelbar vorangegangene Zustand, also der Zustand i, relevant ist. (Markoff-Eigenschaft)

Def. 5.2 *Eine* MARKOFF*'sche Kette heißt* <u>*homogen*</u>*, wenn für alle* $i, j \in S$ *und für alle* $t \in T$ *gilt, daß* $p_{ij}^{(t)} = p_{ij}$*, d.h. wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig vom jeweiligen Schritt* t *sind.*

p_{ij} *heißt Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand* i *in den Zustand* j*.*

Def. 5.3

Die Matrix $\mathbf{M} = (p_{ij})_{i,j \in S}$,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

heißt Übergangsmatrix der MARKOFF*'schen Kette, falls folgendes gilt:*

$$p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in S \text{ und } \sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in S,$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, in irgendeinen nächsten Zustand j *zu gelangen, ist Eins.*

Wir werden in diesem Kapitel ausschließlich homogene MARKOFF'sche Ketten betrachten.

Es sei nun $\{X_t\}_{t \in T}$ eine solche homogene MARKOFF'sche Kette. Wir definieren:

$$p_{ij}(n) := P(X_{m+n} = j | \, X_m = i).$$

Das ist die Wahrscheinlichkeit, daß man nach n Schritten aus dem Zustand i in den Zustand j gelangt. Da die Kette homogen ist, gilt:

$$p_{ij}(n) = P(X_n |\, X_0 = i).$$

Wie kann nun die Matrix für die Wahrscheinlichkeiten $p_{ij}(n)$ aus der „Ein–Schritt–Übergangsmatrix“ berechnet werden?

Annahme: Anfangszustand und Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} bekannt.

Es gilt:

$$\begin{aligned} p_{ij}(0) &= \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = j; \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases} \\ p_{ij}(1) &= p_{ij}. \end{aligned}$$

Untersuchen wir die Wahrscheinlichkeit $p_{ij}(2)$:

$$\begin{aligned} p_{ij}(2) &= P(X_2 = j |\, X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_2 = j, X_1 = k |\, X_0 = i) \end{aligned}$$

Wir wenden nun die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit (vgl. Seite 75) an, und zwar mit

- $A_i := \{X_1 = i\}$, für alle $i \in S$, denn: $\bigcup\limits_{i\in S} A_i = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$, für alle $i, j \in S$ mit $i \neq j$;
- $A := \{X_2 = j\}$.

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
p_{ij}(2) &= \sum_{k\in S} P(X_2 = j|\, X_1 = k, X_0 = i) \cdot P(X_1 = k|\, X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_2 = j|\, X_1 = k) \cdot P(X_1 = k|\, X_0 = i) \\
&= \sum_{k\in S} p_{kj} \cdot p_{ik}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß wir es mit einer MARKOFF'schen Kette zu tun haben. Wir sehen: Tragen wir die Werte $p_{ij}(2)$ in eine Matrix ein, so läßt sich diese als das Produkt der Übergangsmatrix M mit sich selbst darstellen. Folglich gilt für die Matrix M_2 der zweischrittigen Übergänge:

$$\mathbf{M}_2 = (p_{ij}(2))_{i,j\in S} = \mathbf{M}^2.$$

Allgemein gilt die

Rekursion von CHAPMAN–KOLMOGOROFF

$\mathbf{M}_n = \mathbf{M}^n$, bzw.:

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= \sum_{k\in S} p_{ik}(n-m)\cdot p_{kj}(m) \\ &= \sum_{k\in S} p_{ik}(n-1)\cdot p_{kj}, \quad (m=1). \end{aligned}$$

Folg. 9

$$P(X_n = j) = \sum_k p_{kj}(n)\cdot p_k^0.$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_k P(X_n = j, X_0 = k) \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_0 = k)\cdot P(X_0 = k) \\ &= \sum_k p_{kj}(n)\cdot p_k^0. \end{aligned}$$

□

$$p_j = P(X_n = j), \quad \mathbf{p}^T = (p_1, p_2, \ldots)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}^{n^T}\cdot \mathbf{p}^0, \qquad \mathbf{p}^T = \mathbf{p}^{0^T}\cdot \mathbf{M}^n$$

Bsp. 5.1 (Ein-Prozessorsystem)
mit einer I/O–Einheit, *vgl. Bsp. 1.23*

$S = \{1, 2\}$

1*: Programmstatus, in dem sich das System befindet, wenn es ein Programm abarbeitet (Prozessor aktiv)*

2*: I/O–Status, der dann angenommen wird, wenn die I/O–Einheit aktiviert wird.*

Für jeden Schritt n, den das System macht, definieren wir eine Zufallsgröße X_n, die die Elemente der Menge S als Werte annehmen kann, je nachdem, in welchem Zustand sich das System in diesem Schritt befindet. Dann haben wir für die Übergänge zwischen den einzelnen Zuständen folgende Wahrscheinlichkeiten:

$X_n = 1 \implies X_{n+1} = 1$, mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$

$X_n = 1 \implies X_{n+1} = 2$, mit Wahrscheinlichkeit p

$X_n = 2 \implies X_{n+1} = 1$, mit Wahrscheinlichkeit 1

$X_n = 2 \implies X_{n+1} = 2$, mit Wahrscheinlichkeit 0

Übergangsmatrix:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Anfangsverteilung $p_i^{(0)} = P(X_0 = i)$ müssen wir festlegen. Sie ist, entsprechend der Arbeitsweise des Systems, wie folgt definiert:

- $p_1^{(0)} = 1$, d.h. die erste Aktion ist mit Wahrscheinlichkeit Eins die Ausführung eines Programms;
- $p_2^{(0)} = 0$, d.h. die erste Aktion ist mit Wahrscheinlichkeit Null die Aktivierung der I/O–Einheit.

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} (1-p)^2 + p & p(1-p) \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$