Es folgen zunächst Beispiele zu

**Zweidimensionale diskrete Verteilungen**

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten, Varianzen und Kovarianzen (siehe dort)

**Transformationsformel**

$X \sim F$ mit Dichte $f$. Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnung der Dichte von

$$Y_1 = X + a$$
$$Y_2 = bX$$

(Spezialfall von Beispiel 2.26)

**Faltungsformel**

Berechnung der Dichte von $T_1 + T_2 + T_3$, wenn

$T_i \sim Exp(\lambda)$

$T_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$

(siehe Übung)

## 8.4 Korrelation

**Def. 2.33** *Es seien* $X_1$ *und* $X_2$ *zwei zufällige Variablen, für die gilt:* $0 < \sigma_{X_1}, \sigma_{X_2} < +\infty$. *Dann heißt der Quotient*

$$\varrho(X_1, X_2) = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}}$$

*Korrelationskoeffizient der Zufallsgrößen* $X_1$ *und* $X_2$.

*Ist* $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$ *dann heißen die beiden Zufallsgrößen unkorreliert.*

**Bem.:** $X_1$ und $X_2$ unabhängig $\Rightarrow \operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$.

Die Umkehrung der Aussage gilt im allgemeinen nicht.

**Bsp. 2.38 (2x2 Tafel)**

| *Y* *X* | *Raucher* | *Nichtraucher* | *Summe* |
|---|---|---|---|
| *w* | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $p_{1.}$ |
| *m* | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $p_{2.}$ |
| *Summe* | $p_{.1}$ | $p_{.2}$ | *1* |

$$X \sim Bi(1, p_{.2}) \qquad Y \sim Bi(1, p_{2.})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= p_{.2} \quad var(X) = p_{.2}(1 - p_{.2}) = p_{.2}p_{.1} \\
\mathbf{E}(Y) &= p_{2.} \quad var(Y) = p_{2.}(1 - p_{2.}) = p_{2.}p_{1.}
\end{aligned}$$

$$cov(X, Y) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = p_{22} - p_{.2}p_{2.}$$

*Korrelationskoeffizient:*

$$\rho = \frac{p_{22} - p_{.2}p_{2.}}{\sqrt{p_{.2}p_{1.}p_{2.}p_{.1}}} = \frac{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}{\sqrt{p_{.2}p_{2.}p_{1.}p_{.1}}}$$

$$\begin{aligned}
p_{22} - p_{2.}p_{.2} &= p_{22} - (p_{21} + p_{22})(p_{12} + p_{22}) \\
&= p_{22} - (p_{21}p_{12} + p_{22}p_{12} + p_{21}p_{22} + p_{22}^2) \\
&= p_{22}(1 - p_{12} - p_{21} - p_{22}) - p_{21}p_{12} \\
&= p_{22}p_{11} - p_{21}p_{12}
\end{aligned}$$

**Satz 2.26** *Es seien $X_1$ und $X_2$ zwei Zufallsgrößen, für die $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2} > 0$ ist. Dann gilt für den Korrelationskoeffizienten dieser beiden zufälligen Variablen:*

$$-1 \leq \varrho(X_1, X_2) \leq 1.$$

**Beweis:** Wir definieren eine Funktion $A$ wie folgt:

$$A(t,u) := \mathbf{E}[t \cdot (X_1 - \mathbf{E}X_1) + u \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2)]^2 \geq 0.$$

Nun gilt für alle $t, u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
A(t,u) &= \mathbf{E}(t^2(X_1 - \mathbf{E}X_1)^2 + u^2(X_2 - \mathbf{E}X_2)^2) \\
&\quad +2tu\mathbf{E}(X_1 - \mathbf{E}X_1)(X_2 - \mathbf{E}X_2) \\
&= t^2\mathbf{E}(X_1 - \mathbf{E}X_1)^2 + u^2\mathbf{E}(X_2 - \mathbf{E}X_2)^2 \\
&\quad +2tu\mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1)(X_2 - \mathbf{E}X_2)) \\
&= t^2 \cdot \operatorname{Var} X_1 + 2 \cdot t \cdot u \cdot \operatorname{cov}(X_1, X_2) + u^2 \cdot \operatorname{Var} X_2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Wir setzen $t := \sigma_{X_2}$ und $u := \sigma_{X_1}$. Außerdem dividieren wir durch $\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}$:

$$\begin{aligned} \frac{A(\sigma_{X_2},\sigma_{X_1})}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} &= \frac{\sigma_{X_2}^2\cdot\sigma_{X_1}^2+2\cdot\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}\cdot\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)+\sigma_{X_1}^2\cdot\sigma_{X_2}^2}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} \\ &= \sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}+2\cdot\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)+\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2} \\ &= 2\cdot\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}+2\cdot\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)\geq 0 \end{aligned}$$

Also:

$$\underline{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}+\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)\geq 0}.$$

Andererseits gilt aber auch mit $t := -\sigma_{X_2}$ und $u := \sigma_{X_1}$ sowie derselben Herleitung wie oben:

$$\begin{aligned} \frac{A(-\sigma_{X_2},\sigma_{X_1})}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} &= \frac{\sigma_{X_2}^2\cdot\sigma_{X_1}^2-2\cdot\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}\cdot\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)+\sigma_{X_1}^2\cdot\sigma_{X_2}^2}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} \\ &= 2\cdot\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}-2\cdot\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)\geq 0 \end{aligned}$$

Also:

$$\underline{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}-\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)\geq 0}.$$

Das heißt jedoch, daß gilt:

$$-\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}\leq\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)\leq\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}.$$

Wir stellen etwas um und erhalten:

$$-1\leq\frac{\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}}=\varrho(X_1,X_2)\leq 1.$$

$\square$

**Bem. 14** *Die Ungleichung kann auch direkt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung hergeleitet werden.*

**Satz 2.27** *Es seien $X_1$ und $X_2$ zwei Zufallsgrößen, für die $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2} > 0$ ist. Dann gilt $|\varrho(X_1, X_2)| = 1$ genau dann, wenn es Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) gibt, so daß gilt: $P(X_1 = a \cdot X_2 + b) = 1$.*

**Beweis:**

**($\Longleftarrow$)** Es seien die Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß gilt $P(X_1 = a \cdot X_2 + b) = 1$.

Für Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße $X_1$ gilt dann:

$$\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}(a \cdot X_2 + b) = a \cdot \mathbf{E}X_2 + b,$$

$$\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{a \cdot X_2 + b} = \sigma^2_{a \cdot X_2} = a^2 \cdot \sigma^2_{X_2}.$$

Damit gilt für den Korrelationskoeffizienten der Zufallsgrößen $X_1$ und $X_2$:

$$\begin{aligned}
\varrho(X_1, X_2) &= \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} = \frac{\mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2))}{|a| \cdot \sigma_{X_2} \cdot \sigma_{X_2}} \\
&= \frac{\mathbf{E}([(a \cdot X_2 + b) - (a \cdot \mathbf{E}X_2 + b)] \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2))}{|a| \cdot \sigma^2_{X_2}} \\
&= \frac{a \cdot \mathbf{E}(X_2 - \mathbf{E}X_2)^2}{|a| \cdot \sigma^2_{X_2}} = \frac{a \cdot \sigma^2_{X_2}}{|a| \cdot \sigma^2_{X_2}} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{, falls } a > 0 \\ -1 & \text{, falls } a < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Das bedeutet: $|\varrho(X_1, X_2)| = 1$.

**($\Longrightarrow$)** Es gelte $|\varrho(X_1, X_2)| = 1$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\varrho(X_1, X_2) &= \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} \\
&= \frac{\mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2))}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} \\
&= \mathbf{E}\left( \frac{X_1 - \mathbf{E}X_1}{\sigma_{X_1}} \cdot \frac{X_2 - \mathbf{E}X_2}{\sigma_{X_2}} \right)
\end{aligned}$$

Wir definieren zwei Zufallsgrößen:

$$X_1^* := \frac{X_1 - \mathbf{E}X_1}{\sigma_{X_1}}, \qquad X_2^* := \frac{X_2 - \mathbf{E}X_2}{\sigma_{X_2}}.$$

Für die Varianz dieser Zufallsgrößen $X_i^*$ ($i = 1, 2$)

gilt dann:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{X_i^*} &= \mathbf{E}\left(X_i^* - \mathbf{E}X_i^*\right)^2 \\
&= \mathbf{E}\left(X_i^*\right)^2 - \left(\mathbf{E}X_i^*\right)^2 \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{X_i - \mathbf{E}X_i}{\sigma_{X_i}}\right)^2 - \left(E\left(\frac{X_i - \mathbf{E}X_i}{\sigma_{X_i}}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{\sigma^2_{X_i}} \cdot \left(\mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i)^2 - (\mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i))^2\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2_{X_i}} \cdot \sigma^2_{X_i - \mathbf{E}X_i} \\
&= \frac{1}{\sigma^2_{X_i}} \cdot \sigma^2_{X_i} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Wir ermitteln jetzt die Erwartungswerte ($i = 1, 2$):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X_i^* &= \mathbf{E}\left(\frac{X_i - \mathbf{E}X_i}{\sigma_{X_i}}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_{X_i}} \cdot \left(\mathbf{E}X_i - \mathbf{E}(\mathbf{E}X_i)\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_{X_i}} \cdot \left(\mathbf{E}X_i - \mathbf{E}X_i\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Daraus folgt: $\varrho(X_1, X_2) = \mathbf{E}\left(X_1^* \cdot X_2^*\right)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

$\underline{\varrho(X_1, X_2) = 1}$**:** Wir untersuchen die Varianz der Zufallsgröße $X_1^* - X_2^*$:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{X_1^*-X_2^*} &= \mathbf{E}\left((X_1^* - X_2^*) - \mathbf{E}\left(X_1^* - X_2^*\right)\right)^2 \\
&= \mathbf{E}\left((X_1^* - X_2^*) - \mathbf{E}X_1^* + \mathbf{E}X_2^*\right)^2 \\
&= \mathbf{E}\left(X_1^* - X_2^*\right)^2 \\
&= \mathbf{E}\left(X_1^*\right)^2 - 2 \cdot \mathbf{E}\left(X_1^* \cdot X_2^*\right) + \mathbf{E}\left(X_2^*\right)^2
\end{aligned}$$

Für $i = 1, 2$ gilt nun:

$$\mathbf{E}\left(X_i^*\right)^2 = \mathbf{E}\left(X_i^* - \mathbf{E}X_i^*\right)^2 = \sigma^2_{X_i^*} = 1.$$

Damit erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{X_1^*-X_2^*} &= \mathbf{E}\left(X_1^*\right)^2 - 2 \cdot \mathbf{E}\left(X_1^* \cdot X_2^*\right) + \mathbf{E}\left(X_2^*\right)^2 \\
&= 2 - 2 \cdot \varrho(X_1, X_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nun gilt aber $\sigma^2_{X_1^*-X_2^*} = 0$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $P\left(X_1^* - X_2^* = c\right) = 1$ ist. Das bedeutet aber, daß gilt: $\mathbf{E}\left(X_1^* - X_2^*\right) = c$. Wegen $EX_1^* = EX_2^* = 0$ ist $c = 0$, woraus folgt

$$P\left(X_1^* = X_2^*\right) = 1.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= P\left(X_1^* = X_2^*\right) \\ &= P\left(\frac{X_1 - \mathbf{E}X_1}{\sigma_{X_1}} = \frac{X_2 - \mathbf{E}X_2}{\sigma_{X_2}}\right) \\ &= P\left(X_1 = \frac{\sigma_{X_1} \cdot X_2 - \sigma_{X_1} \cdot EX_2}{\sigma_{X_2}} + \mathbf{E}X_1\right) \\ &= P\left(X_1 = \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} \cdot X_2 - \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} \cdot \mathbf{E}X_2 + \mathbf{E}X_1\right) \end{aligned}$$

Wir definieren $a := \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} > 0$ und $b := \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} \cdot \mathbf{E}X_2 + EX_1$, und die Aussage ist für diesen Fall gezeigt.

$\underline{\varrho(X_1, X_2) = -1}$**:** Hier untersucht man die Varianz der Zufallsgröße $X_1^* + X_2^*$ und zeigt, daß sie ebenfalls gleich Null ist. Danach verläuft der Beweis völlig analog zum Fall $\varrho(X_1, X_2) = 1$.

□

**Bem. 15** *Eine Zufallsgröße, deren Erwartungswert gleich Null und deren Varianz gleich Eins sind, heißt* <u>*standardisierte Zufallsgröße*</u>*.*

# Frohe Weihnachten