

8.3 Transformationssatz für Zufallsvektoren

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$ ein zufälliger Vektor. Er habe die Dichtefunktion $f(x_1, \dots, x_p)$. Es sei $g: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung. Sie ordnet einem Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$ einen Vektor $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)^T$ zu und besteht aus Teilabbildungen g_1, \dots, g_p mit $g_i: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ (für alle $i = 1, \dots, p$).

Bsp. 2.32 $\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, wobei \mathbf{A} eine reguläre (p, p) -Matrix ist.

Die Umkehrabbildung $g^{-1}: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ ist durch Funktionen ψ_i ($i = 1, \dots, p$) definiert, die einem Vektor $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)^T$ eine Zahl x_i zuordnen, d.h. $x_i = \psi_i(y_1, \dots, y_p)$ ($i = 1, \dots, p$). Diese Funktionen ψ_i ($i = 1, \dots, p$) existieren aufgrund der umkehrbaren Eindeutigkeit der Funktion g . Die Funktion g^{-1} ist dann folgendermaßen definiert:

$$g^{-1}(\mathbf{y}) = g^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(y_1, \dots, y_p) \\ \vdots \\ \psi_p(y_1, \dots, y_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

In Kurzform,

$$g^{-1}(\mathbf{y}) = (\psi_1(\mathbf{y}), \dots, \psi_p(\mathbf{y}))^T = \mathbf{x}.$$

Wir definieren nun einen weiteren zufälligen Vektor

$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)^T$ wie folgt:

$$\mathbf{Y} = g(\mathbf{X}) := (g_1(X_1, \dots, X_p), \dots, g_p(X_1, \dots, X_p))^T.$$

Die Abbildung $g = (g_1, \dots, g_p)$ bildet die Transformation des zufälligen Vektors \mathbf{X} in den zufälligen Vektor \mathbf{Y} . Wir nehmen an, die g_i ($i = 1, \dots, p$) besitzen stetige partielle Ableitungen nach allen Argumenten.

Für den zufälligen Vektor \mathbf{X} gilt umgekehrt:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (X_1, \dots, X_p)^T \\ &= (\psi_1(Y_1, \dots, Y_p), \dots, \psi_p(Y_1, \dots, Y_p))^T \\ &= g^{-1}(Y_1, \dots, Y_p) = g^{-1}(\mathbf{Y}). \end{aligned}$$

Wir suchen nun die Dichtefunktion h_Y des zufälligen Vektors \mathbf{Y} . Analog zur Transformation zufälliger Variablen (vgl. Satz 2.22 auf Seite 224) gilt der folgende Satz (ohne Beweis)

Satz 2.24 *Die Zufallsvariable \mathbf{X} habe die Dichte f . Die Dichte der Zufallsvariablen $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$ ist*

$$h_Y(y_1, \dots, y_p) = f(\psi_1(y_1, \dots, y_p), \dots, \psi_p(y_1, \dots, y_p)) \cdot |J|,$$

wobei

$$J = \det \left(\frac{\partial \psi_i(y_1, \dots, y_p)}{\partial y_j} \right)_{i,j=1, \dots, p}$$

die sogenannte *Jacobi-Determinante* ist.

J ist also die Determinante der Matrix der partiellen Ableitungen der Funktion g^{-1} .

Bsp. 2.33 *Es sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ ein zufälliger Vektor ($p = 2$), mit unabhängigen Komponenten X_1 und X_2 . Die Dichte f_{X_1, X_2} von \mathbf{X} sei*

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2).$$

Es sei $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$ ein weiterer zufälliger Vektor,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(X_1, X_2) \\ g_2(X_1, X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

*Wir suchen nun die Dichte des zufälligen Vektors \mathbf{Y} .
Zunächst wissen wir, daß die Funktion g aus zwei Teil-
funktionen g_1 und g_2 besteht:*

$$g_1(X_1, X_2) = Y_1 = X_1 + X_2$$

$$g_2(X_1, X_2) = Y_2 = X_2$$

bzw.

$$g_1(x_1, x_2) = y_1 = x_1 + x_2$$

$$g_2(x_1, x_2) = y_2 = x_2$$

*Die Umkehrfunktion g^{-1} besteht aus den beiden Teil-
funktionen:*

$$\psi_1(y_1, y_2) = x_1 = y_1 - y_2$$

$$\psi_2(y_1, y_2) = x_2 = y_2$$

Wir bestimmen nun die Zahl $|J|$:

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$$

Dichte des zufälligen Vektors $\mathbf{Y} = (X_1 + X_2, X_2)$:

$$\begin{aligned} h_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) &= f_{X_1, X_2}(\psi_1(y_1, y_2), \psi_2(y_1, y_2)) \cdot |1| \\ &= f_{X_1, X_2}(y_1 - y_2, y_2) \\ &= \underline{f_{X_1}(y_1 - y_2) \cdot f_{X_2}(y_2)} \end{aligned}$$

Randdichte für Y_1 :

$$\begin{aligned} h_{Y_1}(y_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y_1 - y_2) \cdot f_{X_2}(y_2) dy_2 \\ &=: f_{X_1} * f_{X_2}(y) \end{aligned}$$

Def. 2.32 Die Verknüpfung $f_{X_1} * f_{X_2}$ zweier Funktionen f_1 und f_2 heißt Faltung aus f_1 und f_2 .

Bem.: Die Dichte der Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen ist Faltung der beiden Einzeldichten.

Bsp. 2.34 Es seien $X_1, X_2 \sim R(0, 1)$, d.h.

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei Y der zufällige Vektor aus Beispiel 2.33. Für die Dichtefunktion der zufälligen Variablen $Y_1 = X_1 + X_2$ gilt (mittels Faltung):

$$\begin{aligned} h_{Y_1}(y) &= \int_0^1 f_{X_1}(y-x) \cdot \underbrace{f_{X_2}(x)}_{\equiv 1} dx \\ &= \int_0^1 f_{X_1}(y-x) dx \end{aligned}$$

Nun gilt: $0 \leq X_i < 1$, $i = 1, 2$, d.h.

$$0 \leq X_1 + X_2 = Y_1 < 2.$$

und für die Funktion f_{X_1} :

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(y-x) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq y-x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq y-1 \leq x \leq 1 < y \\ 1, & \text{falls } 0 \leq x < y \leq 1 \\ 0, & \text{falls } y-x \notin [0, 1[\end{cases}
\end{aligned}$$

Randdichte Y_1 von \mathbf{Y} :

$$\begin{aligned}
h_{Y_1}(y) &= \int_0^1 f_{X_1}(y-x) dx \\
&= \begin{cases} \int_{y-1}^1 dx, & \text{falls } 1 < y < 2 \\ \int_0^y dx, & \text{falls } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{falls } y \notin [0, 2[\end{cases} \\
&= \begin{cases} 2-y, & \text{falls } 1 < y < 2 \\ y, & \text{falls } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{falls } y \notin [0, 2[\end{cases}
\end{aligned}$$

Wir addieren nun drei zufällige Variablen X_1, X_2, X_3 ,
 $X_i \sim R(0, 1)$,

$$Y_3 = (X_1 + X_2) + X_3.$$

Für die Dichtefunktion der Zufallsgröße Y_3 gilt dann
mittels Faltung:

$$\begin{aligned} h_{Y_3}(z) &= h_{Y_1} * f_{X_3}(z) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_{Y_1}(z - x) \cdot f_{X_3}(x) dx \\ &= \int_0^1 h_{Y_1}(z - x) \cdot f_{X_3}(x) dx \\ &= \int_0^1 h_{Y_1}(z - x) dx \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq X_i < 1$ folgt dann:

$$0 \leq (X_1 + X_2) + X_3 = Y_1 + X_3 = Y_3 < 3.$$

Für die Dichte der Summe der drei Zufallsgrößen $X_1,$

X_2 und X_3 gilt nun:

$$h_{Y_3}(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } z \notin [0, 3[\\ \frac{z^2}{2} & , \text{ falls } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{(z-1)^2}{2} - \frac{(2-z)^2}{2} & , \text{ falls } 1 < z \leq 2 \\ \frac{(3-z)^2}{2} & , \text{ falls } 2 < z < 3 \end{cases}$$

/sasuser/Stochastik/ZGWS.sas

Vermutung: Die Summe unabhängiger Zufallsgrößen nähert sich bei wachsender Zahl der Zufallsgrößen einer Normalverteilung.

Diese Vermutung ist richtig. Sie gilt sogar (unter sehr allgemeinen Voraussetzungen) unabhängig davon, welche Verteilung diese Zufallsgrößen vorher hatten (Normal-, Gleich-, Exponentialverteilung oder diskret). Wir kommen später beim Zentralen Grenzwertsatz noch einmal darauf zurück.

Bsp. 2.35 (BOX–MÜLLER–Transformation) *Es seien U_1 und U_2 zwei unabhängige, über dem Intervall $[0, 1[$ gleichverteilte Zufallsgrößen ($U_i \sim R(0, 1)$, $i = 1, 2$), $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$ ein zufälliger Vektor. Wir betrachten den zufälligen Vektor $\mathbf{V} = g(\mathbf{U}) = (X, Y)^T$, wobei:*

$$X = g_1(U_1, U_2) = \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \cos 2\pi U_2$$

$$Y = g_2(U_1, U_2) = \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \sin 2\pi U_2$$

Wir suchen die Dichtefunktionen für die zufälligen Variablen X und Y . Wir bestimmen zunächst die Umkehrfunktion zur Abbildung g . Es gilt:

$$\mathbf{U} = g^{-1}(\mathbf{V}) = (\psi_1(X, Y), \psi_2(X, Y)).$$

Wir ermitteln die Teilfunktionen ψ_1 und ψ_2 . Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= (-2 \ln U_1 \cdot \cos^2(2\pi U_2)) + (-2 \ln U_1 \cdot \sin^2(2\pi U_2)) \\ &= (-2 \ln U_1) \cdot (\cos^2(2\pi U_2) + \sin^2(2\pi U_2)) \\ &= -2 \ln U_1 \end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir:

$$U_1 = \psi_1(X, Y) = e^{-\frac{1}{2}(X^2+Y^2)}.$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{Y}{X} = \tan 2\pi U_2.$$

Daraus folgt:

$$U_2 = \psi_2(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \arctan \left(\frac{Y}{X} \right).$$

Bestimmung von $|J|$. Wir wissen bisher:

$$\begin{aligned}\psi_1(x, y) &= e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = u_1 \\ \psi_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \arctan \left(\frac{y}{x} \right) = u_2\end{aligned}$$

Dann gilt für

$$\begin{aligned}|J| &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{array} \right\| \\ |J| &= \left\| \begin{array}{cc} -x \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) & -y \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-y}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) \cdot x^2} & \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) \cdot x} \end{array} \right\| \\ &= \left| -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\end{aligned}$$

Für die Dichtefunktion des zufälligen Vektors \mathbf{V} gilt nach der Transformationsformel:

$$f_{\mathbf{V}}(x, y) = f_{\mathbf{U}}(\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)) \cdot |J|.$$

Da die Zufallsgrößen U_1 und U_2 unabhängig sind, gilt:

$$f_{\mathbf{V}}(x, y) = f_{U_1}(\psi_1(x, y)) \cdot f_{U_2}(\psi_2(x, y)) \cdot |J|.$$

Nun sind $U_1, U_2 \sim R(0, 1)$. Daraus folgt aber:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{V}}(x, y) &= |J| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \\ &= f_X(x) \cdot f_Y(y). \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß die Zufallsgrößen X und Y unabhängig und standardnormalverteilt sind:

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad Y \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Bsp. 2.36 (Treffen einer Zielscheibe*) *Es seien folgende Bedingungen erfüllt*

- *V1: Die Randverteilungen von X und Y seien stetig*
- *V2: Die Dichte $h(x, y)$ von (X, Y) hängt nur vom Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ vom Nullpunkt ab (Radialsymmetrie)*
- *V3: Die Fehler in x - und y -Richtung sind unabhängig.*

Sei Z die zufällige Abweichung in beliebiger Richtung.

Dann ist

$$Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Beweis: Seien $p(x)$ und $q(y)$ Randdichten von (X, Y) .

Aus V2 und V3 folgt

$$p(x)q(y) = s(r), \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.3)$$

Substitutionsmethode:

$$x = 0: p(0)q(y) = s(y), \quad p(0) \neq 0$$

$$y = 0: q(0)p(x) = s(x), \quad q(0) \neq 0 \quad x = y: p(x) = q(x)$$

und damit $p(0)p(y) = s(y)$

Teilen obige Funktionalgleichung durch $p(0)^2$,

$$\frac{p(x)p(y)}{p(0)p(0)} = \frac{s(r)}{p(0)^2} = \frac{p(r)}{p(0)}$$

Logarithmieren

$$\ln\left(\frac{p(x)}{p(0)}\right) + \ln\left(\frac{p(y)}{p(0)}\right) = \ln\left(\frac{p(r)}{p(0)}\right)$$

Mit $f(x) := \ln\left(\frac{p(x)}{p(0)}\right)$:

$$f(x) + f(y) = f(r), \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$y = 0, x = -x_1$: $f(-x) = f(|x|)$ wegen $f(0) = 0$.

$x^2 = x_1^2 + x_2^2$:

$$f(r) = f(y) + f(x_1) + f(x_2), \quad r^2 = y^2 + x_1^2 + x_2^2$$

Wiederholtes Einsetzen:

$$f(r) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k), \quad r^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2$$

$k = n^2, x = x_1 = \dots = x_k$:

$$f(nx) = n^2 f(x) \Rightarrow_{x=1} f(n) = n^2 f(1)$$

$$x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}:$$

$$n^2 f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(n \frac{m}{n}\right) = f(m) = m^2 f(1)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = f(1) \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow$$

$$f(x) = cx^2, \quad c = f(1)$$

für alle rationalen x . Wegen der Stetigkeit (V1) folgt diese Relation für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = p(0)e^{cx^2}$$

$p(x) > 0$ da Wkt.dichte, $c < 0$, $c := -\frac{1}{2\sigma^2}$.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = p(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{cx^2} dx = p(0)\sigma\sqrt{2\pi}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Gemeinsame Dichte von (X, Y) :

$$p(x)p(y) = \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Fehler in einer beliebigen Richtung, θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$Z = X \cos(\theta) + Y \sin(\theta)$$

Variablentransformation

$$z = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$$

$$u = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

Jacobi-Determinante J : $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = | -1 | = 1$

Quadrieren liefert

$$z^2 = x^2 \cos^2(\theta) + y^2 \sin^2(\theta) + 2xy \cos(\theta) \sin(\theta)$$

$$u^2 = x^2 \cos^2(\theta) + y^2 \sin^2(\theta) - 2xy \cos(\theta) \sin(\theta)$$

Addition: $x^2 + y^2 = z^2 + u^2$ also gemeinsame Dichte von (Z, U) :

$$h_1(z, u) = \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{z^2+u^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

d.h. Z und U sind unabhängig, $h_1(z, u) = h_Z(z)h_U(u)$
und

$$h_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

□

Satz 2.25 (Transformationsatz für EW)

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$ ein zufälliger Vektor und $g: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

a) Es sei \mathbf{X} diskret mit Wkt.funktion (Zähldichte) f . Falls

$$\sum_{\mathbf{x}} |g(\mathbf{x})| f(\mathbf{x}) < \infty$$

so gilt:

$$\mathbf{E}(g(\mathbf{X})) = \sum_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}).$$

b) Es sei \mathbf{X} stetig. $f: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ sei die Dichtefunktion des zufälligen Vektors \mathbf{X} . Falls

$$\int_{\mathbb{R}^p} |g(x_1, \dots, x_p)| \cdot f(x_1, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p < \infty$$

gilt, so:

$$\mathbf{E}g(\mathbf{X}) = \int_{\mathbb{R}^p} g(x_1, \dots, x_p) \cdot f(x_1, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p.$$

Bem.: Der Beweis des Satzes erfordert Maßtheorie. Wir haben eine eingeschränkte Version bereits im Abschnitt Erwartungswerte gezeigt.

Bsp. 2.37 Es sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ ein stetiger zufälliger Vektor mit Dichtefunktion $f(x_1, x_2)$. Wir definieren die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(\mathbf{X}) := X_1 + X_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}g(\mathbf{X}) &= \mathbf{E}(X_1 + X_2) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 + x_2) \cdot f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{\mathbb{R}^2} x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 + \\
 &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot f_{X_1}(x_1) dx_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 \cdot f_{X_2}(x_2) dx_2 \\
 &= \mathbf{E}X_1 + \mathbf{E}X_2
 \end{aligned}$$

Allgemeiner erhalten wir also für zwei stetige zufällige Variablen X_1 und X_2 :

$$\mathbf{E}(c \cdot X_1 + d \cdot X_2) = c \cdot \mathbf{E}X_1 + d \cdot \mathbf{E}X_2.$$

Das ist ein Beweis der Aussage 5 in Satz 2.4 für stetige zufällige Variablen.