# 7 Transformation von Zufallsvariablen

Sei $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zufällige Variable mit Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X < x)$.

Wir betrachten eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und definieren eine weitere zufällige Variable $Y\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $Y = g(X)$.

$$Y: \quad \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xleftrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

$$Y(\omega) = g(X(\omega)), \forall \omega \in \Omega.$$

Diese zufällige Variable besitzt die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y < y) \\
&= P(\{\omega\colon Y(\omega) < y\}) \\
&= P(\{\omega\colon g(X(\omega)) < y\}) \\
&= P(X \in \underbrace{\{x\colon g(x) < y\}}_{\in \mathcal{B}^1}) = P(g(X) < y)
\end{aligned}$$

**Bem.:** $\{x\colon g(x) < y\} \in \mathcal{B}^1$ gilt, wenn die Funktion $g$ meßbar ist.

**Satz 2.22** *Es sei $X$ eine, auf dem Intervall $[a, b]$ definierte ($a = -\infty, b = +\infty$ ist erlaubt) Zufallsgröße mit der stetigen Dichtefunktion $f$. Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$). Dann hat die zufällige Variable $Y = g(X)$ die Dichtefunktion*

$$h(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{dg^{-1}}{dy}(y)\right| = \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}.$$

**Bem. 12** *Die Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ bewirkt, daß die Funktion $g$ auf dem Intervall $[a, b]$ streng monoton ist.*

**Beweis:** Wir bezeichnen $y := g(x)$ und unterscheiden zwei Fälle:

**Fall 1:** Es gilt $g'(x) > 0$, für alle $x \in [a, b]$, d.h. die Funktion $g$ ist streng monoton wachsend.

Wir betrachten die Menge

$$A = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) < x\} = \{\omega \in \Omega\colon Y(\omega) < y\}.$$

Dann gilt:

$$P(A) = F_X(x) = F_Y(y).$$

Wir bilden die erste Ableitung der Verteilungsfunktion $F_X$:

$$\begin{aligned} f(x) &:= F_X'(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = \frac{dF_Y}{dx}(y) \\ &= \underbrace{\frac{dF_Y}{dy}(y)}_{=:h(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = h(y)\frac{dy}{dx} = h(y) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Wir stellen um und erhalten ($g'(x) > 0$)

$$h(y) = \frac{f(x)}{|g'(x)|} = \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y)|} = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|.$$

Das ist die Behauptung.

Die letzte Gleichung folgt aus der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion, die man sich wie folgt herleiten kann:

$$1 = (g(g^{-1}(y)))' = g'(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y).$$

**Fall 2:** Es sei $g'(x) < 0$, für alle $x \in [a, b]$, d.h. die Funktion $g$ ist streng monoton fallend.

Wir betrachten die Menge

$$\begin{aligned} A = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) < x\} &= \{\omega \in \Omega \colon g(X(\omega)) > g(x)\} \\ &= \{\omega \in \Omega \colon y < Y(\omega) < \infty\}. \end{aligned}$$

Dann gilt folgendes:

$$\begin{aligned} P(A) = F_X(x) = &= P\left(\overline{\{\omega\colon Y(\omega) \le y\}}\right) \\ &= P\left(\overline{\{\omega\colon Y(\omega) < y\}}\right) \\ &= 1 - P\left(\{\omega\colon Y(\omega) < y\}\right) \\ &= 1 - F_Y(y) \end{aligned}$$

Wir differenzieren und erhalten:

$$\begin{aligned} f(x) &= F'_X(x) = -\frac{d}{dx}F_Y(y) = -\frac{dF_Y(y)}{dy}\frac{dy}{dx} \\ &= -h(y)\frac{dy}{dx} = -h(y)\cdot \underbrace{g'(x)}_{<0} = h(y)|g'(x)| \end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir analog zum ersten Fall

$$h(y) = \frac{f(x)}{|g'(x)|} = \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y)|} = f(g^{-1}(y))\cdot\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|.$$

Das ist die Behauptung.

$\square$

**Bem. 13** *Wem diese Herleitung zu langatmig erscheint, und sich ein wenig mit Integralrechnung auskennt, der überlegt sich:*

$$h(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}}{dy}(y) \right|$$

*ist Dichte von $Y$, denn:*

$$\begin{aligned} H(y) &= \int_a^y f(g^{-1}(t) \cdot \left| \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \right| dt \\ &= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(y)} f(u)\, du = F_X(g^{-1}(y)) = F_X(x) \end{aligned}$$

*ist Verteilungsfunktion von $Y$. Dabei wurde Substitutionsregel, $g^{-1}(t) = u$ angewendet.*

**Bsp. 2.23** *Es sei $X \sim R(0, \frac{\pi}{2})$., d.h. $X$ hat die Dichte*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \textit{, falls } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \textit{, sonst} \end{cases} .$$

*Wir betrachten die Funktion $g$,*

$$y = g(x) = \sin x.$$

*Für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ gilt: $0 \le g(x) < 1$. Die Umkehrfunktion von $g$ ist*

$$g^{-1}(y) = \arcsin y.$$

*Wir betrachten eine Zufallsgröße $Y$ mit $Y = \sin X$. Dann gilt für die Dichte von $Y$ nach Satz 2.22:*

$$\begin{aligned} h(y) &= f(\arcsin y) \cdot \left| \frac{d \arcsin}{dy}(y) \right| \\ &= f(\arcsin y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \textit{, falls } 0 \le y < 1 \\ 0 & \textit{, sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Bsp. 2.24** *Es sei $X$ eine zufällige Variable mit einer auf einem bestimmten Intervall differenzierbaren Verteilungsfunktion $F(x) = P(X < x) \in [0,1[$ und Dichte $f$.*

*Die Dichte der Zufallsvariablen $Y = F(X)$ ist mittels Satz 2.22:*

$$\begin{aligned} h(y) &= f(F^{-1}(y)) \cdot \frac{dF^{-1}}{dy}(y) \\ &= f(F^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{F'(F^{-1}(y))} \\ &= \frac{f(F^{-1}(y))}{f(F^{-1}(y))} = 1 \end{aligned}$$

*Das gilt für alle $y \in [0,1[$, d.h.:*

$$h(y) = \begin{cases} 1 & \textit{, falls } 0 \le y < 1 \\ 0 & \textit{, sonst} \end{cases} .$$

*Folglich gilt: $Y \sim R(0,1)$!*

**Bem.:** Wir haben also gezeigt: Wenn $X \sim F$ so ist die transformierte Zufallsvariable

$$Y = F(X) \sim R(0,1)$$

Umgekehrt gilt: Ist $U \sim R(0,1)$ und ist $F$ eine beliebige Verteilungsfunktion, so ist $Y = F^{-1}(U) \sim F$.

Anwendung: Zufallszahlen (vgl. Kapitel 4).

**Bsp. 2.25** *Es sei* $X: \quad \Omega \to \mathbb{R}$ *mit* $X \sim Exp(\lambda)$, *d.h.* $X$ *besitzt die Verteilungsfunktion*

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}, \qquad x \geq 0.$$

*Wegen* $U := F(X) \sim R(0,1)$ *gilt für alle* $\omega \in \Omega$*:*

$$U(\omega) = F(X(\omega)).$$

*Wir bezeichnen* $y := U(\omega)$ *und* $x := X(\omega)$*. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} y &= F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \\ e^{-\lambda \cdot x} &= 1 - y \\ x &= -\frac{1}{\lambda} \ln(1-y) \end{aligned}$$

*Das ist äquivalent zu:*

$$X(\omega) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U(\omega)).$$

*Folglich gilt: Die Zufallsgröße*

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \sim Exp(\lambda).$$

*ist exponentialverteilt mit dem Parameter* $\lambda$*.*

**Bsp. 2.26** *Es sei $X$ eine Zufallsgröße mit der Dichtefunktion $f$. Desweiteren sei $g$ die wie folgt definierte Funktion:*

$$g(x) = ax + b.$$

*Wir betrachten nun eine weitere Zufallsgröße $Y$,*

$$Y = g(X) = aX + b, \quad a \neq 0.$$

*Wir bezeichnen $y := g(x)$. Dann gilt:*

$$g^{-1}(y) = x = \frac{y-b}{a}.$$

*Die Dichte der Zufallsvariable $Y$ wird nach Satz 2.22 wie folgt berechnet:*

$$\begin{aligned} h(y) &= f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}}{dy}(y) \right| \\ &= f\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|} \end{aligned}$$

**Bem.:** Im Fall der Normalverteilung, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, haben wir dieses Ergebnis implizit bereits in Abschnitt 6.1 (Satz 2.15) erhalten.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Es sei ($a = \frac{1}{\sigma}, b = \frac{\mu}{\sigma}$)

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad X = \sigma Y + \mu.$$

Nach der in diesem Abschnitt hergeleiteten Formel ergibt sich die Dichtefunktion $h$ der Zufallsgröße $Y$:

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{\left|\frac{1}{\sigma}\right|} f\left(\frac{y+\frac{\mu}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma f(\sigma y + \mu) \\ &= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma y + \mu - \mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{aligned}$$

Dichtefkt. einer Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$!

Das heißt: Eine normalverteilte Zufallsgröße wird in eine standard–normalverteilte Zufallsgröße transformiert, indem der Parameter $\mu$ subtrahiert und anschließend durch den Parameter $\sigma$ dividiert wird. Sei also $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= P(X < x) \\
&= P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Y} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(Y < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Es gilt: $Y \sim (0, 1)$. (vgl. auch Satz 2.15)