6 Die Normalverteilung

Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

6.1 Standard-Normalverteilung

$\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} && \text{Dichte} \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt && \text{Verteilungsfunktion} \end{aligned}$$

$\varphi(x), \Phi(x)$ sind tabelliert!

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(-x) \\ \Phi(x) &= 1 - \Phi(-x) \end{aligned}$$

Frage: Für welches x gilt: $\Phi(x) = \alpha$?

$x = \Phi^{-1}(\alpha) \quad \alpha$-Quantil.

$\Phi^{-1}(\alpha)$ als Funktion: Quantilfunktion

`Programm: Descr_normal.sas`

$X \sim N(0,1)$.

$$P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Satz 2.15 *Es gilt:*

$$\begin{aligned} X \sim N(0,1) &\iff \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2) \\ X \sim N(\mu, \sigma^2) &\iff \alpha X + \beta \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2) \\ X \sim N(\mu, \sigma^2) &\iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \end{aligned}$$

Beweis: : Wir zeigen nur 1. ($\rightarrow$). Sei $X \sim N(0,1)$.

$$\begin{aligned} P(\sigma X + \mu \le x) &= P(X \le \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(u-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, du \end{aligned}$$

$\frac{u-\mu}{\sigma} = t, \quad \frac{1}{\sigma} du = dt.$

Die anderen Aussagen beweist man analog. □

6.2 Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

Vergleichen Sie

a) σ^2 fest, μ verschieden

b) μ fest, σ^2 verschieden

Satz 2.16 *: Sei* $X_1 \sim N(\mu, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu, \sigma_2^2)$*,* $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ *und* $a > 0$*. Dann gilt:* $P(\mu - a < X_1 < \mu + a) > P(\mu - a < X_2 < \mu + a)$.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
P(\mu - a < X_1 < \mu + a) &= P\left(\frac{-a}{\sigma_1} < \frac{X_1 - \mu}{\sigma_1} < \frac{a}{\sigma_1}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{a}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{\sigma_1}\right) \\
&> \Phi\left(\frac{a}{\sigma_2}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{\sigma_2}\right) \\
&= P(\mu - a < X_2 < \mu + a).
\end{aligned}
$$

$\square$

Programm:

```
Descr_Normal_1.sas
```

Beispiel: $X_1 \sim N(10, 4), X_2 \sim N(10, 9), a = 1.$

$$\begin{aligned}
P(9 < X_1 < 11) &= \Phi(\frac{11-10}{2}) - \Phi(\frac{9-10}{2}) \\
&= \Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{1}{2}) \\
&= \Phi(\frac{1}{2}) - (1 - \Phi(\frac{1}{2})) \\
&= 2 \cdot \Phi(\frac{1}{2}) - 1 \\
&= 2 \cdot 0.6915 - 1 = 0.383.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(9 < X_2 < 11) &= \Phi(\frac{11-10}{3}) - \Phi(\frac{9-10}{3}) \\
&= \Phi(\frac{1}{3}) - \Phi(-\frac{1}{3}) \\
&= \Phi(\frac{1}{3}) - (1 - \Phi(\frac{1}{3})) \\
&= 2 \cdot \Phi(\frac{1}{3}) - 1 \\
&= 2 \cdot 0.6293 - 1 = 0.2586.
\end{aligned}$$

Programm:

`Descr_Normal_2.sas`

Für die Berechnung der Wktn. $P(X < x)$ bei Standard–Normalverteilung existieren Programme und Tabellen.

Zu beachten:

- $x \geq 0$. In diesem Fall kann der Wert für $P(X < x)$ direkt aus der Tabelle abgelesen werden.
- $x < 0$. $P(X < x) = \Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, z.B.

$$P(X < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 0.15.$$

- $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$, z.B.

$$\begin{aligned} P(-1 \leq x \leq 1) &= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) \\ &= 2\Phi(1) - 1 \approx 0.68. \end{aligned}$$

Bsp. 2.19

- $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$: $P(Y < 0) = \frac{1}{2}$ *(lt. Tabelle);*
- $X \sim \mathrm{N}(1,2^2)$: $P(X < 0) = \Phi\left(\frac{0-1}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1 - 0.691 = 0.309.$

Def. 2.21 *Sei die Verteilungsfunktion F und die Wkt. p gegeben. Ein Wert x_p mit*

$$p = P(X < x_p) = F(x_p)$$

heißt p-Quantil der Zufallsvariablen X, der Verteilungsfunktion (oder nur der Verteilung) F.

Bsp. 2.20 *Sei $Y \sim (0,1)$. Gesucht ist das $p = 0.95$-Quantil von Y.*

Für die Standard-Normalverteilung kann man aus der Tabelle für $p = 0.95$ den Wert $x_p(0,1) \approx 1.645$ ablesen.

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Bestimmen das p-Quantil $x_p(\mu, \sigma)$:

$$\begin{aligned} p &= P(X < x_p(\mu, \sigma)) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x_p(\mu,\sigma)-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P(Y < x_p(0,1)), \qquad Y \sim \mathcal{N}(0,1). \end{aligned}$$

D.h.

$$x_p(0,1) = \frac{x_p(\mu,\sigma)-\mu}{\sigma},$$

woraus durch Umstellen folgt:

$$x_p(\mu,\sigma) = \sigma \cdot x_p(0,1) + \mu.$$

6.3 $k \cdot \sigma$–Intervalle

Def. 2.22 *Für eine normalverteilte Zufallsvariable* $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ *ist* $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ *ein* ***k · σ–Intervall***, $k \in \mathbb{Z}^+$. *Interessant sind dabei die Wahrscheinlichkeiten:*

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma).$$

$$\begin{aligned} P(X \in [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]) &= \Phi\left(\frac{\mu + k\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - k\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(k) - \Phi(-k) \\ &= \Phi(k) - (1 - \Phi(k)) \\ &= 2 \cdot \Phi(k) - 1 \end{aligned}$$

Wir stellen also fest: Die Wahrscheinlichkeit eines $k \cdot \sigma$–Intervalls ist gleich $2 \cdot \Phi(k) - 1$.

Bsp. 2.21 $k \cdot \sigma$*–Intervalle für* $k = 1, \ldots, 5$ *gilt:*

k	$2 \cdot \Phi(k) - 1$
1	0.6827
2	0.9545
3	0.9973
4	≈ 1
5	≈ 1

Bsp. 2.22 *Ein Zeitungsverkäufer sieht die Nachfrage* X *nach einer Tageszeitung als angenähert normalverteilt an. Das* $2 \cdot \sigma$*–Intervall sei* $[322, 408]$*. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 400 Exemplare der Zeitung verkauft werden?*
Die Frage ist also: $P(X \geq 400) =$ *?*
Nach Voraussetzung gilt nun:

$$
\begin{aligned}
322 &= \mu - 2\sigma, \\
408 &= \mu + 2\sigma.
\end{aligned}
$$

Wir addieren beide Gleichungen und erhalten:

$$730 = 2\mu \quad \Longrightarrow \quad \mu = 365.$$

Durch Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung erhalten wir dann:

$$86 = 4\sigma \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 21,5.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 400) &= 1 - P(X < 400) \\
&= 1 - \Phi\left(\tfrac{400-\mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\tfrac{400-365}{21.5}\right) \\
&\approx 1 - \Phi(1.63) \\
&\approx 1 - 0.95 \\
&= 0.05
\end{aligned}$$

Wir sehen also: Hat man ein $k \cdot \sigma$–Intervall gegeben (und es wird Normalverteilung angenommen), so ist es möglich, jede andere Wahrscheinlichkeit auszurechnen.

Anwendung z.B. bei der Untersuchung von Toleranzen bei Werkstückmaßen oder bei Gewichtseinlagen von Gerichten.

6.4 Besonderheiten der Normalverteilung

1. Zentraler Grenzwertsatz

Seien X_i unabhängig, identisch verteilt,

$\mathbf{E}X_i = \mu, \operatorname{Var} X_i = \sigma^2$.

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

$$Z_n := \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \to Z, \quad Z \sim \mathcal{N}0,1).$$

Beweis: siehe Grenzwertsätze.

2. Fehlertheorie

Satz 2.17 *Fehler sind unter folgenden Annahmen (asymptotisch) normalverteilt:*

V1: Jeder Fehler ist Summe einer sehr großen Anzahl sehr kleiner, gleich großer Fehler, die verschiedene Ursachen haben.

V2: Die verschiedenen Fehlerkomponenten sind unabhängig.

V3: Jede Fehlerkomponente ist mit Wkt. 0.5 positiv und mit Wkt. 0.5 negativ.

Beweis: : Seien ϵ_j, $j = 1, \ldots, n$ die Fehlerkomponenten.

V3 $\Rightarrow P(\epsilon_j = \pm\epsilon) = \frac{1}{2}$, d.h. $\mathbf{E}\epsilon_j = 0, \quad \text{var}\epsilon_j = \epsilon^2$

V1 $\Rightarrow$ Gesamtfehler $X = \sum_j \epsilon_j$, also

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(\epsilon_j) = 0 \\
\mathrm{var}(X) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}(\epsilon_j) = n\epsilon^2 =: \sigma^2
\end{aligned}$$

Charakteristische Funktion von ϵ_j:

$$\phi_{\epsilon_j}(t) = \mathbf{E}(e^{it\epsilon_j}) = \frac{1}{2}(e^{it\epsilon} + e^{-it\epsilon}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it\epsilon)^{2k}}{(2k)!}$$

Charakteristische Funktion von X:

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \prod_{j=1}^{n} \phi_{\epsilon_j}(t) \\
&= (1 - \frac{t^2}{2!}\epsilon^2 + \frac{t^4}{4!}\epsilon^4 - + \cdots)^n \\
&= \Big(1 - \frac{t^2}{2!}\frac{\sigma^2}{n} + o(\frac{1}{n})\Big)^n \\
&= \Big(1 - \frac{t^2\sigma^2/2!}{n}\Big)^n + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \\
&\to_{n\to\infty} e^{-t^2\sigma^2/2}
\end{aligned}$$

Das ist die char. Fkt. von $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ $\square$

3. Maximale Entropie bei gegebenen Mittelwert μ und Varianz σ^2.

f: Wkt.dichte auf $(-\infty, \infty)$.

$$(*) \qquad \int x f(x)\,dx = \mu, \quad \int (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \sigma^2$$

Entropie:

$$H(f) := -\int f(x) \log f(x)\,dx$$

ist zu maximieren unter den obigen Bedingungen (*).

$\Longrightarrow \quad f =$Normaldichte.

Satz 2.18 : *Eine Dichtefunktion, die die Entropie unter den obigen Bedingungen maximiert ist normal.*

Zum Beweis verwenden wir die Jensensche Ungleichung:

Lemma 2.19 (Jensensche Ungleichung für konkave Funktione

Es sei g eine differenzierbare und konkave Funktion, und sei X eine zufällige Variable. Dann gilt:

$$\mathbf{E}g(X) \leq g(\mathbf{E}X).$$

Beweis: Sei $T(x)$ die Tangente an die Kurve der Funktion g im Punkt x_0,

$$g(x) \leq T(x) = g(x_0) + \underbrace{g'(x_0)}_{\text{Anstieg der Kurve in } x_0} \cdot (x - x_0).$$

Wir setzen nun $x := X$ und $x_0 := \mathbf{E}X$ und erhalten:

$$g(X) \leq g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X) \cdot (X - \mathbf{E}X).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}g(X) &\leq \mathbf{E}(g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X) \cdot (X - \mathbf{E}X)) \\
&= g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X) \cdot \underbrace{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)}_{=0} \\
&= g(\mathbf{E}X)
\end{aligned}$$

$\square$

Beweis: (des Satzes)

Seien p und q beliebige Dichten. Da die Logarithmus-Funktion konkav ist folgt aus der Jensenschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\int \ln\Bigl(\frac{q}{p}(x)\Bigr)p(x)\,dx &= \mathbf{E}_p \ln\Bigl(\frac{q}{p}(X)\Bigr)\\
&\leq \ln \mathbf{E}_p\Bigl(\frac{q}{p}(X)\Bigr)\\
&= \ln \int \Bigl(\frac{q}{p}(x)p(x)\,dx\Bigr)\\
&= \ln\Bigl(\int q(x)\,dx\Bigr) = \ln 1 = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$H(p) = -\int p \ln p\,dx \leq -\int p \ln q\,dx$$

Wir wählen q wie folgt:

$$\ln q = \alpha + \beta(x-\mu) + \gamma(x-\mu)^2,$$

wobei α, β, γ so gewählt sind, daß q Dichte und $q \sim (\mu, \sigma^2)$. Also

$$\begin{aligned}
H(p) &\leq -\int p \ln q\,dx\\
&= -\int p(x)\bigl(\alpha + \beta(x-\mu) + \gamma(x-\mu)^2\bigr)\,dx\\
&= -(\alpha + \gamma\sigma^2)
\end{aligned}$$

feste obere Schranke für die Entropie.

Diese Schranke wird angenommen für $p = q$, also

$$\begin{aligned} \ln p &= \alpha + \beta(x-\mu) + \gamma(x-\mu)^2 \\ p &= e^{\alpha+\beta(x-\mu)+\gamma(x-\mu)^2} \end{aligned}$$

Offen: Gibt es α, β, γ mit p Dichte und $p \sim (\mu, \sigma^2)$?

Antwort: ja, $\alpha = -\ln(\sqrt{2\pi}\sigma), \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{2}\sigma^2$. $\square$

4. Die Summe normalverteilter Zufallsvariablen ist normalverteilt.

Satz 2.20 *Seien*

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

unabhängig. Dann:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Beweis: : (allgemeiner für n Zufallsvariablen)

Seien X_j, $i = j, \ldots, n$ Zufallsvariablen mit $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$.

Charakteristische Funktion von X:

$$\phi_X(t) = \prod_{j=1}^{n} e^{it\mu_j - \sigma_j^2 t^2/2} = e^{it\mu - \sigma^2 t^2/2}$$

wobei $\mu = \sum \mu_j, \sigma^2 = \sum \sigma_j^2 \Rightarrow X \sim (\mu, \sigma^2)$ $\square$

5. Treffen einer Zielscheibe

Satz 2.21 *Sei* (X, Y) *zweidimensionale Zufallsvariable. Folgende Annahmen seien erfüllt:*

- *V1: Die Randverteilungen von* X *und* Y *seien stetig*
- *V2: Die Dichte* $h(x, y)$ *von* (X, Y) *hängt nur vom Abstand* $\sqrt{x^2 + y^2}$ *vom Nullpunkt ab (Radialsymmetrie)*
- *V3: Die Fehler in* x*- und* y*-Richtung sind unabhängig.*

Sei Z *die zufällige Abweichung in beliebiger Richtung. Dann ist*

$$Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Beweis: siehe Abschnitt 8.3. □