Bem. 8 *Unter den diskreten Verteilungen hat nur die geometrische Verteilung diese Eigenschaft (siehe Abschnitt 3).*

5.3 Zuverlässigkeitsmodelle

Def. 2.18 (Zuverlässigkeit) *Die Zuverlässigkeit eines Systems ζ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System zum Zeitpunkt t intakt ist:*

$$\textit{Rel}(\zeta) = P(X \geq t).$$

Annahme:

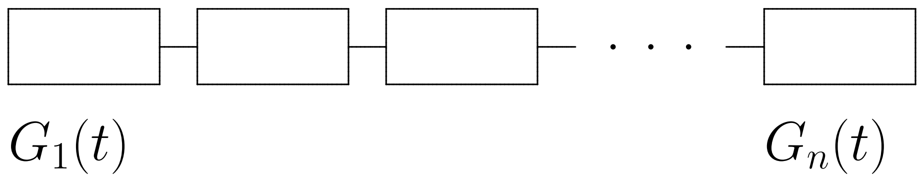
Das System besteht aus mehreren Komponenten

Die Komponenten sind unabhängig

$X_i \sim Exp(\lambda_i)$.

- Reihensystem
- Parallelsystem
- k aus n System
- Proversionswahrscheinlichkeit
- Faltung

Reihensystem ζ_R



$$\begin{aligned}
\text{Rel}(\zeta_R) &= P(X_R \geq t) = P(X_1 \geq t, \ldots, X_n \geq t) = \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq t) = \prod_{i=1}^{n} G_i(t) = \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t \right),
\end{aligned}$$

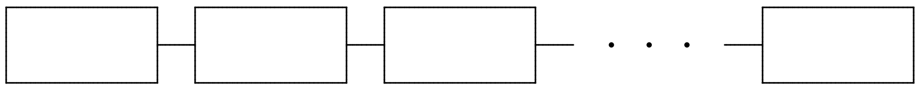
Die zufällige Lebensdauer X_R des Reihensystems ist

$$X_R \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right).$$

Die mittlere Lebensdauer des Reihensystems ist

$$\mathbf{E} X_R = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}.$$

Reihensystem:



$$\text{Rel}(\zeta_R) = e^{\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t\right)},$$

$$n \to \infty, \lambda_i = \lambda : \ \text{Rel}(\zeta_R) \ \to 0.$$

$$n \to \infty, \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} \to \lambda : \ \text{Rel}(\zeta_R) \ \to e^{-\lambda t}$$

D.h. die Lebensdauer X_R des Reihensystems ist, wenn

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty,$$

asymptotisch wieder exponentialverteilt.

Die Exponentialverteilung ist eine sogenannte Extremwertverteilung.

Bem. 9 *Die Lebensdauer* X_R *des Reihensystems kann beschrieben werden durch*

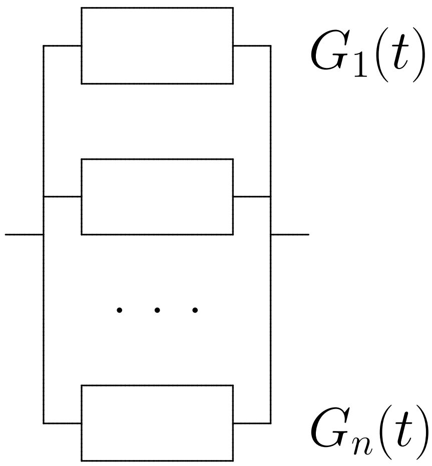
$$X_R = \min_i X_i.$$

Die Zufallsvariable X_R *hat oft (auch dann wenn nicht* $X_i \sim Exp(\lambda)$*) asymptotisch eine Weibull-Verteilung mit der Dichte*

$$f(t) = b(\lambda t)^{b-1} e^{-(\lambda t)^b}, \quad t > 0, b > 0, \lambda > 0.$$

Das ist dann der Fall, wenn die Dichte der unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen X_i *'kurze' Tails hat.*

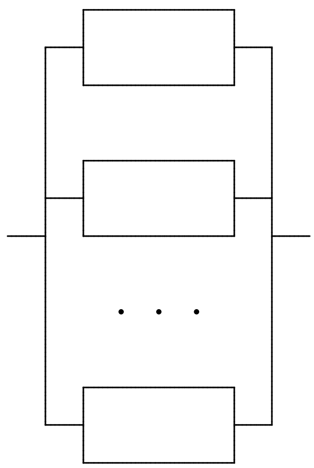
Parallelsystem ζ_P



$$\begin{aligned}
\text{Rel}(\zeta_P) &= P(X_P \geq t) = 1 - P(X_P < t) \\
&= 1 - \underbrace{P(X_1 < t, \ldots, X_n < t)}_{\substack{\text{alle Komponenten sind} \\ \text{vor dem Zeitpunkt } t \\ \text{ausgefallen}}} = \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i < t) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} F_i(t) \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n
\end{aligned}$$

wenn $\lambda_i = \lambda \quad \forall i$

Parallelsystem



$$\text{Rel}(\zeta_P) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n$$

$$n \to \infty, \lambda_i = \lambda : \text{ Rel}(\zeta_P) \to 1$$
$$n \to \infty : \text{ Rel}(\zeta_P) \sim 1 - e^{-e^{-\lambda t + \ln n}}$$

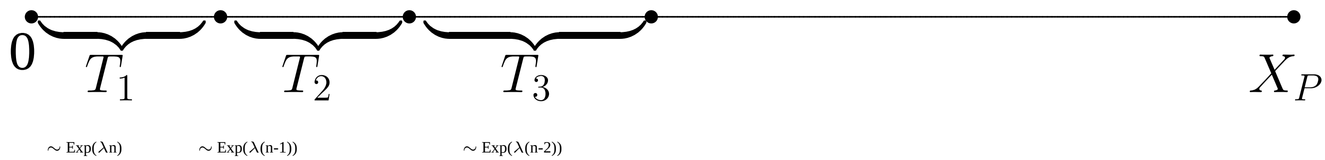
Das ist auch eine Extremwertverteilung, die sogenannte Gumbel-Verteilung.

Bem. 10 *Die Lebensdauer X_P des Parallelsystems kann beschrieben werden durch*

$$X_P = \max_i X_i.$$

Der Fall der Gumbel-Verteilung tritt ein, wenn X_i 'mittlere' Tails hat.

Mittlere Lebensdauer des Parallelsystems ($\lambda_i = \lambda$)



T_1: Wartezeit bis zum ersten Ausfall einer Komponente

T_i: Wartezeit zwischen $(i-1)$-tem und i-tem Ausfall einer Komponente

$$X_P = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

Zwischen $(i-1)$-tem und i-tem Ausfall einer Komponente arbeiten genau $n-i+1$ Komponenten gleichzeitig. Die Lebensdauer dieses Teilsystems aus $n-i+1$ Komponenten (Reihensystem) hat eine Exponentialverteilung mit Parameter $\mu_i = (n-i+1)\cdot\lambda$,

$$\mathbf{E}T_i = \frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{n-i+1}\cdot\frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbf{E}X_P = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-i+1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

k aus n Systeme

Das System fällt aus, wenn k Komponenten ausgefallen sind.

Lebensdauer:

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i.$$

Mittlere Lebensdauer:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}T &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\mu_i} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n-i+1} \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots \frac{1}{n-k+1}\right).
\end{aligned}$$

n aus n-System: Parallelsystem

1 aus n-System: Reihensystem

Proversionswahrscheinlichkeiten

Problem: Reihensystem mit 2 Komponenten und der zufälligen Lebensdauer X_1, X_2:

$X_1 \sim Exp(\lambda_1), \quad X_2 \sim Exp(\lambda_2)$.

System fällt aus.

Mit welcher Wkt. liegt das an der ersten Komponente?

$$\begin{aligned}
P(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty P(X_1 < X_2 | X_2 = t) f_2(t) dt \\
&= \int_0^\infty P(X_1 < t) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\
&= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_1 t}) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\
&= 1 - \int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\, dt \\
&= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}$$

Beispiel: $\frac{1}{\lambda_1} = 1000h, \frac{1}{\lambda_2} = 500h$:

$$P(X_1 < X_2) = \frac{1}{3}.$$

Faltung der Exponentialverteilung

System mit 2 Komponenten: Zunächst ist nur die erste Komponente eingeschaltet. Wenn diese ausfällt, wird automatisch die 2. Komponente zugeschaltet. Das System fällt aus, wenn beide Komponenten defekt sind.

Die Lebensdauern X_1, X_2 seien unabhängig und exponential, $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ verteilt.

Frage: Wkt. für Systemausfall?

$$\begin{aligned}
F(t) &= P(X_1 + X_2 < t) \\
&= \int_0^\infty P(X_1 + X_2 < t | X_2 = s) f(s) ds \\
&= \int_0^\infty P(X_1 < t - s) f(s) ds \\
&= \int_0^\infty F(t - s) f(s) ds \\
&= \int_0^t \left(1 - e^{-\lambda(t-s)}\right) \lambda e^{-\lambda s}\, ds \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\, ds - \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\, ds \\
&= 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Dichte ($t > 0$):

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lambda e^{-\lambda t} + \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} \\ &= \lambda^2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Erlang-Verteilung mit Parameter $(2, \lambda)$.

Bem. 11 *Seien* $X_1, \ldots, X_n$ *unabhängig,* $X_i \sim Exp(\lambda)$*,* $i = 1, \ldots, n$*. Dann ist*

$$X_1 + X_2 + \cdots X_n \sim \textit{Erlang}(n, \lambda).$$

Dichte:

$$f_{Erl}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Beweis: *durch Induktion.* □

Ausfallrate-Funktion

Def. 2.19 (Ausfallrate-Funktion) *Sei F eine Verteilungsfunktion mit Dichte f. Dann heißt*

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Ausfallrate-Funktion (oder Hazardrate-Funktion).

Interpretation: Die Zufallsvariable X habe bereits die Zeit t überlebt.

Frage: Wie groß ist die Wkt., dass X den Zeitraum $[t, t+dt]$ nicht überlebt, also

$$\begin{aligned} P(X \leq t + dt | X > t) &= \frac{P(X \in [t, t + dt])}{P(X > t)} \\ &= \frac{\int_t^{t+dt} f(x)dx}{1 - F(t)} \\ &= \frac{F(t + dt) - F(t)}{1 - F(t)} \\ &\approx \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} = \mu(t)dt. \end{aligned}$$

$\mu(t)$: Rate mit der ein Bauteil, das t alt ist, ausfällt.

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\mu(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda.$$

Bei Exponentialverteilung ist die Ausfallrate konstant, sie hängt nicht vom Zeitpunkt ab!

Übungsaufgabe: Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit Dichte f und konstanter Ausfallrate. Zeigen Sie, dass f Exponential-Dichte ist.
Hinweis: Setzen Sie $u(t) := 1 - F(t)$ und lösen Sie die Differentialgleichung $u' - \lambda u = 0$.

Def. 2.20 (IFR, DFR)

- *Eine Verteilungsfunktion F hat Increasing Failure Rate (IFR), falls $\mu(t)$ monoton wachsend ist.*
- *F hat Decreasing Failure Rate (DFR), falls $\mu(t)$ monoton fallend ist.*

Bsp. 2.17 (Weibull-Verteilung)

Verteilungsfkt.: $F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^b}, \quad t, \lambda, b > 0,$

Dichtefkt.: $f(t) = b(\lambda t)^{b-1} e^{-(\lambda t)^b}$

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{b(\lambda t)^{b-1} e^{-(\lambda t)^b}}{e^{-(\lambda t)^b}} = b(\lambda t)^{b-1}$$

IFR *falls* $b > 1$

IFR, DFR *falls* $b = 1$ *(exp)*

DFR *falls* $b < 1$

- *System mit verdeckten Mängeln, aber langsamen "Altern" $\rightarrow$ Ausfallrate sinkt $\rightarrow$ Weibull, $b < 1$*
- *System mit wenig verdeckten Mängeln, aber schnellem "Altern" $\rightarrow$ Ausfallrate steigt $\rightarrow$ Weibull, $b > 1$*

Bsp. 2.18 (Hjorth-Verteilung)

$$\textit{Verteilungsfkt.:} \quad F(t) \ = 1 - \frac{e^{-\lambda t^2/2}}{(1+bt)^{\gamma/b}}, \qquad t, \lambda, \gamma, b > 0,$$

$$\textit{Dichtefkt.:} \quad f(t) \ = \frac{\lambda t(1+bt)+\gamma}{(1+bt)^{\gamma/b+1}}$$

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \lambda t + \frac{\gamma}{1+\beta t}$$

fallend für $\lambda = 0$

badewannenförmig für $0 < \lambda < b\gamma$.

Die Hjorth-Verteilung modelliert also badewannenförmige Ausfallraten.

- zunächst fallen viele Objekte aus (Kinderkrankheiten)
- dann Ausfallrate zeitweilig konstant
- schliesslich mehren sich die Ausfälle aufgrund von Alterungserscheiningen.

Bedienungstheorie

M/M/s - Wartesystem

- $X \sim Exp(\lambda)$ Zeit zwischen Ankünften/Anforderungen
- Forderungen reihen sich in eine Warteschlange ein.
- $B \sim Exp(\mu)$ Bedienungszeiten, unabhängig
- s parallele Bedienungsplätze
- Bei frei werdendem Bedienungsplatz wird die nächste

Forderung sofort bedient.

Fragestellungen:

- Mittlere Anzahl der Forderungen im System
- Mittlere Warteschlangenlänge
- Mittlere Wartezeit $\mathbf{E}W_t$
- Besetztwahrscheinlichkeit P_B
- Wartezeitverteilung

$$P(W_t \leq u) = 1 - P_B e^{-(s\mu-\lambda)u}$$

$$\mathbf{E}W_t = \frac{P_B}{s\mu - \lambda}.$$

Stationärer Fall, wenn $\frac{1}{s\mu} < \frac{1}{\lambda}$.

M/M/s - Verlustsystem

- $X \sim Exp(\lambda)$ Zeit zwischen Ankünften/Anforderungen
- Eine ankommende Forderung wird sofort bedient, wenn ein Bedienungsplatz frei ist, ansonsten geht sie verloren.
- $B \sim Exp(\mu)$ Bedienungszeiten, unabhängig
- s parallele Bedienungsplätze

Fragestellungen:

- Verlustwahrscheinlichkeit
- Mittlere Anzahl der besetzten Bedienungsplätze

Zusammenfassung (Exponentialverteilung)

- Exponentialdichte

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{if} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

- Erwartungswert

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\lambda}.$$

- Überlebensfunktion

$$G(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

- Cauchy-Funktionalgleichung

$$G(s + t) = G(s) \cdot G(t).$$

- Die Exponential-Verteilung ist gedächtnislos.
- Die einzige gedächtnislose stetige Verteilung ist die Exponential-Verteilung
- Exponential-Verteilung ist eine Extremwertverteilung.

- Anwendungen in der Zuverlässigkeitstheorie.

  Reihensystem

  Parallelsystem

- Ausfallrate-Funktion

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

- Die Ausfallratefunktion der Exponentialverteilung ist konstant.