4 Charakteristika von Verteilungsfunktionen

4.1 Der Erwartungswert

Bsp. Eine Münze wird 3 mal geworfen.

Wie oft können wir erwarten, daß Blatt oben liegt?

Wie oft wird im Mittel Blatt oben liegen?

$$X : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

Erwartungswert:

$0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$

D.h. bei 10maliger Durchführung des Experiments können wir im Mittel mit 15mal Blatt rechnen!

Def. 2.8 *: Sei X diskrete Zufallsvariable,*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n & \ldots \\ \\ p_1 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

heißt <u>Erwartungswert</u> von X.

Bsp.: a) $X \sim$ Poisson(λ)

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \sum_{i=0}^{\infty} p_i i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot i \\ &= \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}}_{e^{\lambda}} e^{-\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

z.B. mittlere Ankunftsrate.

b) $X \sim B(n,p)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= p\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= p \cdot n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= p \cdot n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}p^{i}(1-p)^{n-1-i}, \qquad k = i+1 \\
&= n \cdot p.
\end{aligned}
$$

c) $X \sim Geo(p)$

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ p & pq & pq^2 & \ldots & pq^{k-1} & \ldots \end{pmatrix} \qquad q = 1 - p$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} \\ &= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \\ &= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Beweis des vorletzten Gleichheitszeichens:

a) durch vollst. Induktion

b) Differenzieren der geometrischen Reihe

Def. 2.9 : *Sei X stetig mit Dichtefunktion $f(x)$. Die Größe*

$$\mathbf{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

heißt Erwartungswert von X.

Bsp. a) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2/2} dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \\
&= \mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma \cdot t \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} dt \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

$\frac{x-\mu}{\sigma} = t, \quad dt = \frac{1}{\sigma} dx$

b) $X \sim Exp(\lambda), \qquad \lambda > 0$

$$\mathbf{E}X = \int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

c) $X \sim R(a,b)$

gleichverteilt auf dem Intervall (a,b).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Bem. 3 *Die Erwartungswerte sind für stetige und diskrete Zufallsgrößen zweckmäßigerweise unterschiedlich definiert. Sie läßt sich jedoch (maßtheoretisch) vereinheitlichen.*

Satz 2.4 (Eigenschaften des Erwartungswertes) *Es seien X, X_1 und X_2 beliebige zufällige Variablen. $a, b, c \in \mathbb{R}$ seien ebenfalls beliebig gewählt. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Wenn $P(X = c) = 1$, d.h. nimmt die zufällige Variable X genau einen festen Wert an, so folgt $\mathbf{E}X = \mathbf{E}c = c$.*

2. *Wenn $P(X \geq c) = 1$, so $\mathbf{E}X \geq c$.*

3. $\mathbf{E}(c \cdot X) = c \cdot \mathbf{E}X$.

4. $\mathbf{E}(X + c) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}c = \mathbf{E}X + c$.

5. $\mathbf{E}(a \cdot X_1 + b \cdot X_2) = a \cdot \mathbf{E}X_1 + b \cdot \mathbf{E}X_2$.

Beweis: Wir beweisen stellvertretend Aussage 2 dieses Satzes. Da wir den Erwartungswert für diskrete und stetige zufällige Variablen unterschiedlich definiert haben, müssen wir die Aussage für beide Arten von Zufallsgrößen getrennt beweisen.

- Es sei X eine diskrete Zufallsgröße,

$$X: \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}$$

  Nach Voraussetzung: $c = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$. Daraus folgt:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \cdot p_i \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} c \cdot p_i = c \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i = c.$$

  Das ist die Aussage.

- Es sei X eine stetige zufällige Variable mit der Dichtefunktion f. Dann gilt:

$$P(X \geq c) = \int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx = 1. \quad \Rightarrow$$

$$P(X < c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx = 0. \quad \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx \\
&= \int\limits_{c}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx \\
&\geq c \cdot \underbrace{\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx}_{=1} \\
&= c
\end{aligned}
$$

Das ist wiederum die Aussage.

$\square$

Bem.: Ergänzungen:

- Aus Aussage 4 folgt:

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X) = \mathbf{E}X - \mathbf{E}(\mathbf{E}X) = 0.$$

- Aussage 5 besagt, daß der Erwartungswert eine linearer Operator ist.

Satz 2.5 (Transformationssatz, reduz.) *für Erwartungswerte. Sei* X *ZV,* g*:* $R \longrightarrow R$ *differenzierbar,* $g'(x) \neq 0 \quad \forall x$*. Dann gilt:*

$$\mathbf{E}(g(X)) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} g(x_i)p_i, & \textit{falls X diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, & \textit{falls X stetig} \end{cases}$$

vorausgesetzt die Erwartungswerte existieren.

Wir zeigen die letzte Behauptung.

Beweis: : Nach der Def. des Erwartungswertes gilt:

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \cdot h(y)\,dy,$$

wobei $h(y)$ die Dichte von $Y = g(X)$ ist.

Wir bestimmen jetzt $h(y)$:

Es gilt: (wir setzen voraus g ist invertierbar)

$$F_Y(t) \;=\; F_{g(X)}(t) =$$

$$P(g(X) < t) \;=\; P(X < g^{-1}(t)) = \int\limits_{-\infty}^{g^{-1}(t)} f(x)\,dx$$

Substitution: $g(x) = y, g'(x)dx = dy$.

$$F_{g(X)}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y)}dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} = h(y)$$

ist Dichte von $g(x)$.

$$\Rightarrow \mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}dy$$

Substitution: $y = g(x), dy = g'(x)dx$

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

$\square$