Schubfachprinzip

Lea Jacobs

November 9, 2015

Inhalt

Das Schubfachprinzip - Definition

Werden n Objekte in r Fächer gegeben, wobei $r < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mehr als eines der Objekte.

Formale Definition

Sind N und R zwei endliche Mengen mit $|N| = n > r = |R|$ und $f : N \to R$ eine Abbildung, dann gibt es ein $a \in R$ mit $|f^{-1}(a)| \geq 2$.

Verschärfung

Sind N und R zwei endliche Mengen mit $|N| = n > r = |R|$ und $f : N \to R$ eine Abbildung, so existiert ein $a \in R$ mit $|f^{-1}(a)| \geq \lceil \frac{n}{r} \rceil$.

Beweis durch Widerspruch: Wenn nicht, dann würde $|f^{-1}(a)| < \frac{n}{r}$ für alle a gelten, und somit n $= \sum_{a \in R} |f^{-1}(a)| < r \frac{n}{r} = n$, was offensichtlich falsch ist.

Haare zählen

In München gibt es mindestens zwei Menschen mit der exakt gleichen Anzahl Haare.

Haare zählen

In München gibt es mindestens zwei Menschen mit der exakt gleichen Anzahl Haare.

Jeder Mensch hat zwischen 10.000 und 20.000 Haare. Man kann jedoch sicher sagen, dass Menschen weniger als 1 Million Haare haben. Es gibt also 1 Million Schubfächer. In München leben ca. 1,3 Millionen Menschen. Teilt man diese auf die Schubfächer auf, ergibt sich: in München haben mindestens zwei Personen exakt die gleiche Anzahl Haare.

Haare zählen (mit Verschärfung)

Es gibt mindestens 82 Deutsche, welche die selbe Anzahl Haare auf dem Kopf tragen.

Haare zählen (mit Verschärfung)

Es gibt mindestens 82 Deutsche, welche die selbe Anzahl Haare auf dem Kopf tragen.

Es gibt ca. 82.000.000 Deutsche, diese werden auf die 1.000.000 Mengen (Schubfächer) der verschiedenen Anzahlen Haare verteilt. Daher gibt es mindestens eine Menge mit $\lceil \frac{82.000.000}{1.000.000} \rceil = 82$ Objekten.

Beispiel mit Differenz

Wählt man zwölf paarweise verschiedene zweistellige Zahlen, so gibt es zwei unter ihnen, deren Differenz eine zweistellige Zahl ist, deren beide Ziffern gleich sind.

Beispiel mit Differenz

Wählt man zwölf paarweise verschiedene zweistellige Zahlen, so gibt es zwei unter ihnen, deren Differenz eine zweistellige Zahl ist, deren beide Ziffern gleich sind.

Zahlen mit gleichen Ziffern sind Vielfache von 11. Es gibt elf Restklassen modulo 11, demzufolge 11 Schubfächer, jedoch 12 zweistellige Zahlen. Nach Schubfachprinzip haben daher zwei der Zahlen den gleichen Rest modulo 11. Ihre Differenz hat den Rest 0 modulo 11 und ist damit eine Zahl, deren beide Ziffern gleich sind.

Abbildungseigenschaften

Sei N eine Menge mit $|N| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $f : N \to N$ ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.

Abbildungseigenschaften

Sei N eine Menge mit $|N| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $f : N \to N$ ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.

Sei f injektiv, d.h. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Falls f *nicht* surjektiv ist, es also ein $z \in N$ gibt, dass kein Urbild bzgl. f hat, dann gibt es nach dem Schubfachprinzip zwei Elemente, die das gleiche Bild haben. Das ist ein Widerspruch zur Injektivität.

Sei f surjektiv, d.h. zu jedem $y \in N$ ex. ein $x \in N$ mit f(x) = y. Falls f nun *nicht* injektiv wäre, also $x, y \in N$ mit $x \neq y$ existieren, sodass $f(x) = f(y)$ gilt, dann können nach dem Schubfachprinzip nicht mehr als n-1 Elemente als Bilder unter f vorkommen, was ein Widerspruch zur Surjektivität ist.

Grade in ungerichteten Graphen

Sei $G = (V,E)$ ein ungerichteter Graph (ohne Schlingen oder Mehrfachkanten). Wenn $|V| \geq 2$ gilt, dann gibt es mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

Grade in ungerichteten Graphen

Sei $G = (V{,}E)$ ein ungerichteter Graph (ohne Schlingen oder Mehrfachkanten). Wenn $|V| \geq 2$ gilt, dann gibt es mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

Sei $n = |V|$. Gibt es einen Knoten mit Grad n-1, so besitzt dieser eine Kante zu jedem anderen Knoten. Dann kann es keinen Knoten mit Grad 0 geben. Die Grade 0 und n-1 schließen sich also gegenseitig aus, es bleiben n-1 Grade übrig. Da der Graph jedoch $n > n - 1$ Knoten hat, gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

Teilbarkeit

Wir betrachten die Menge $A \subseteq \{1, 2, ..., 2n\}$ *mit* $|A| = n + 1$. *Dann gibt es* $a, b \in A$ *mit* $a \neq b$ *und* $a | b$.

Teilbarkeit

Wir betrachten die Menge $A \subseteq \{1, 2, ..., 2n\}$ *mit* $|A| = n + 1$*. Dann gibt es* $a, b \in A$ *mit* $a \neq b$ *und* $a|b$*.*

Indem man durch zwei teilt, bis die Zahl nicht mehr gerade ist, lässt sich jede Zahl $a \in A$ als $a = 2^k m$ darstellen. Dabei ist m eine ungerade Zahl zwischen 1 und 2n-1, wovon es n verschiedene gibt. Da $|A| = n + 1$, aber die Anzahl der ungeraden Anteile nur n beträgt, müssen zwei Zahlen den selben ungeraden Anteil besitzen. Sie unterscheiden sich also nur in k, eine ist also ein Vielfaches der anderen.

Summen

Gegeben seien n ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_n$. Dann gibt es immer einen Abschnitt von aufeinander folgenden Zahlen $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a$, deren Summe $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ ein Vielfaches von n ist.

Summen

Gegeben seien n ganze Zahlen $a_1, ..., a_n$. Dann gibt es immer einen Abschnitt von aufeinander folgenden Zahlen $a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a$, deren Summe $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ ein Vielfaches von n ist.

Sei $N = \{0, a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n\}$. Sei R die Menge der Restklassen modulo n mit $R = \{0, 1, ..., n-1\}$. Wir betrachten die Abbilung $f : N \to R$, die jedes Element auf ihren Rest bei Division durch n abbildet. Da $|N| = n + 1 > n = |R|$ folgt nach dem Schubfachprinzip, dass es zwei Summen aus N geben muss, die den gleichen Rest haben, wobei die erste davon auch die leere Summe sein kann. Subtrahiert man nun die kleinere von der größen Summe:

$$\sum_{i=k+1}^{l} a_i = \sum_{i=1}^{l} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i$$

so erhält man eine Teilsumme, die bei Division durch n den Rest 0 hat.

Verlustfreie Komprimierung

Ein verlustfreier Datenkompressionsalgorithmus nimmt Eingabedaten und komprimiert sie so, dass die Orginaldaten vollständig wiederhergestellt werden können.

> *Verlustfreie Datenkompressionsalgorithmen können nicht alle Eingabedaten komprimieren.*

Anders ausgedrückt: Jede Eingabe ist als String einer gewissen Länge gegeben. Zu jedem verlustfreien Kompressionsalgorithmus gibt es eine Eingabe, die durch Kompression nicht kleiner wird, und zu jedem Kompressionsalgorithmus, der mindestens eine Eingabe verkleinert, gibt es eine Eingabe, die durch die Kompression größer wird.

Verlustfreie Komprimierung

> *Verlustfreie Datenkompressionsalgorithmen können nicht alle Eingabedaten komprimieren.*

Angenommen, der Kompressionsalgorithmus verwandelt jede Eingabe in eine Ausgabe, die nicht länger als die Eingabe ist, und mindestens eine Eingabedatei in eine Ausgabe, die (echt) kürzer ist.

Sei F die kürzeste Eingabedatei, die so komprimiert wird, dass $m > n$ ist, wobei m die Länge von F und n die Länge der komprimierten Version ist. Da $n < m$ ist, muss nach der Annahme jede Datei der Länge n ihre Länge bei der Kompression beibehalten. Es gibt 2^n solche Dateien. Gemeinsam mit F sind es also $2^n + 1$ Dateien, die zu einer der 2^n Dateien der Länge n komprimiert werden. Damit müssen nach dem Schubfachprinzip zwei Dateien auf die gleiche Kompression abgebildet werden, wodurch keine verlustfreie Komprimierung mehr möglich wäre. Es ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme.

Danke

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!

Quellen

- *Aigner, Martin, Gnter M. Ziegler, and Karl H. Hofmann. Das BUCH der Beweise. Vol. 2. Springer, 2010.*
- *Reiss, Kristina, and Gernot Stroth. Endliche Strukturen. Springer-Verlag, 2011.*
- *https://de.wikipedia.org/wiki/Schubfachprinzip*
- *https://en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle*