Der Satz von Pick

Vortrag zum Proseminar “Das BUCH der Beweise”

Jochen Taeschner

31. Januar 2013

Übersicht

Einleitung

Einschränkung und Vereinbarungen

Der Satz von Pick ist eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines einfachen Polygons auf einem Gitter.

Gitter

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- "Punkte" sind in der Regel Gitterpunkte

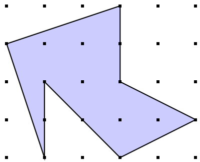
Die Polygone müssen also folgende Eigenschaften erfüllen:

- Einfach: endlich, planar, Kanten schneiden sich nicht.
- In Eckpunkten berühren sich genau zwei Kanten
- (Eckpunkte sind Gitterpunkte).

Der Satz von Pick

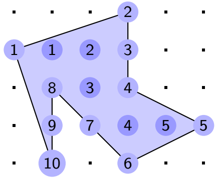
Der Flächeninhalt A_P eines Polygons P mit I_P Innenpunkten und B_P Randpunkten ist:

$$A'_P := I_P + \frac{B_P}{2} - 1 \overset{\text{z.z.}}{=} A_P$$



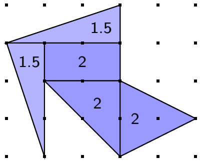
Für unser Polygon P haben wir
5 Innenpunkte und 10 Außenpunkte.

$$A'_P = 5 + \frac{10}{2} - 1 = 9$$



Herkömmliche Berechnung

$$A_P = 2 \cdot 1.5 + 3 \cdot 2 = 3 + 6 = 9 = A'_P$$



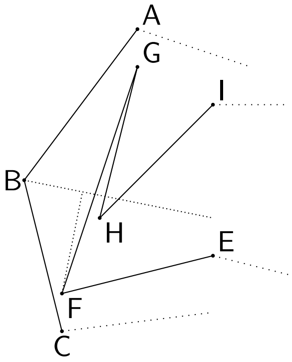
Beweis des Satzes von Pick

Strategie

- Zeigen, dass jedes Polygon mit $n > 3$ Ecken in zwei kleinere Polygone zerlegt werden kann
- Satz von Pick besteht bei Verschmelzung zweier Polygone
- Zeigen den Satz für sehr einfache Polygone (Basisfälle)
  - Fall 1: Rechteck
  - Fall 2: Gitterparalleles rechtwinkliges Dreieck
- Zeigen den Satz für beliebige Dreiecke

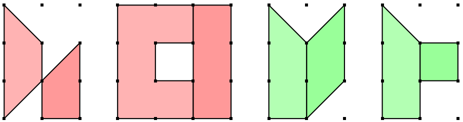
Polygone zerlegen

- Suche konvexen Abschnitt ABC ($\angle ABC < 180^\circ$)
- Falls Diagonale $\overline{AC}$ vollständig im Polygon liegt: fertig.
- Sonst wähle den Punkt P in $\triangle ABC$, dessen Lot auf die Winkelhalbierende am nächsten an B ist.
- $\overline{BP}$ ist die gewünschte Diagonale



Verschmelzung zweier Polygone

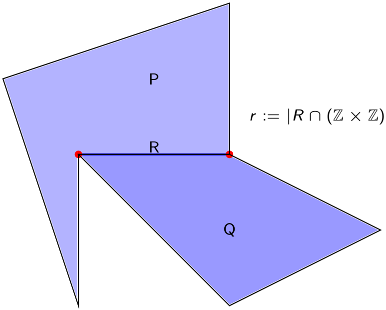
- Zwei Polygone P und Q dürfen nur entlang eines gemeinsamen Randabschnittes R verschmolzen werden und es gilt $P \cap Q = R$.



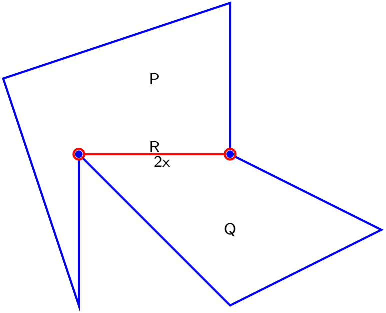
- Müssen zeigen, dass $A'_P + A'_Q = A'_{P \cup Q}$ für zwei Polynome P und Q gilt.

Additivität

$$I_{P \cup Q} := I_P + I_Q + r - 2 \qquad B_{P \cup Q} := B_P + B_Q - 2 \cdot r + 2$$



$r := |R \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})|$



Additivität (cont.)

$$I_{P\cup Q} = I_P + I_Q + r - 2 \qquad B_{P\cup Q} = B_P + B_Q - 2\cdot r + 2$$

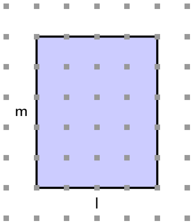
$$\begin{aligned}
A'_{P\cup Q} &= I_{P\cup Q} + \frac{B_{P\cup Q}}{2} - 1 \\
&= (I_P + I_Q + r - 2) + \frac{B_P + B_Q - 2r + 2}{2} - 1 \\
&= \ I_P + I_Q + r - 2 \ + \frac{B_P}{2} + \frac{B_Q}{2} - r + 1 - 1 \\
&= \left(I_P + \frac{B_P}{2} - 1\right) + \left(I_Q + \frac{B_Q}{2} - 1\right) \\
&= A'_P + A'_Q \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Fall 1: Rechteck

$$
\begin{aligned}
I_R &= (l-1)\cdot(m-1) \\
&= l\cdot m - l - m + 1 \\
B_R &= 2l + 2m \\
A'_R &= I_R + \frac{B_R}{2} - 1 \\
&= l\cdot m - l - m + 1 + \frac{2l+2m}{2} - 1 \\
&= l\cdot m = A_R \quad \text{o.k.}
\end{aligned}
$$

Flächeninhalt ist:

$$A_R = l \cdot m$$

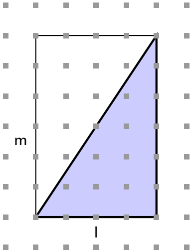


Fall 2: Gitterparalleles rechtwinkliges Dreieck

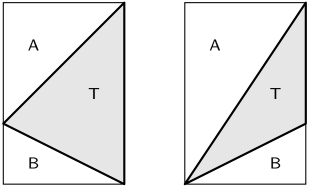
$$
\begin{aligned}
I_T &= \frac{(l-1)\cdot(m-1)-x}{2} \\
&= \frac{l\cdot m - l - m + 1 - x}{2} \\
B_T &= l + m + 1 + x \\
A'_T &= I_T + \frac{B_T}{2} - 1 \\
&= \frac{l\cdot m - l - m + 1 - x}{2} + \frac{l + m + 1 + x}{2} - 1 \\
&= \frac{l\cdot m - l - m + 1 - x + l + m + 1 + x - 2}{2} \\
&= \frac{l\cdot m}{2} = A_T \quad \text{o.k.}
\end{aligned}
$$

Flächeninhalt ist:

$$A_T = \frac{l\cdot m}{2}$$



Allgemeine Dreiecke, Fall I: Ergänzung mit 2 Dreiecken



$$A_T = A_R - A_A - A_B$$

Betrachten nun I_R und B_R:

$$I_R = I_A + I_B + I_T + B_T - x - 1$$
$$B_R = B_A + B_B + 2x - B_T - 2$$

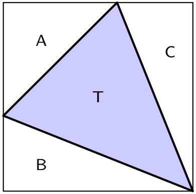
$$A_R = I_A + I_B + I_T + B_T - x - 1 + \frac{B_A + B_B + 2x - B_T - 2}{2} - 1$$

$$A_R = A'_A + A'_B + I_T + \frac{B_T}{2} - 1$$

$$\begin{aligned} A_T &= A_R - A_A - A_B \\ &= A_A + A_B + I_T + \frac{B_T}{2} - 1 - A_A - A_B \\ &= I_T + \frac{B_T}{2} - 1 = A'_T \quad \text{o.k.} \end{aligned}$$

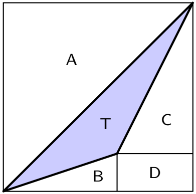
Allgemeine Dreiecke, andere Fälle

- Analog funktionieren diese beiden Fälle:



$$
\begin{aligned}
I_R &= I_A + I_B + I_C + I_T + B_T - 3 \\
B_R &= B_A + B_B + B_C - B_T \\
A_R &= A_A + A_B + A_C + I_T + B_T/2 - 1 \\
A_T &= A_R - A_A - A_B - A_C = I_T + B_T/2 - 1 = A'_T
\end{aligned}
$$

und



$$
\begin{aligned}
I_R &= I_A + I_B + I_C + I_D + I_T + B_T + B_D/2 - 4 \\
B_R &= B_A + B_B + B_C + -B_T \\
A_R &= A_A + A_B + A_C + A_D + I_T + B_T/2 - 1 \\
A_T &= \ldots = I_T + B_T/2 - 1 = A'_T
\end{aligned}
$$

- Für alle Dreiecke bewiesen.

Beweis, Kurzfassung

- Wählen beliebiges einfaches Polygon P
- Zerlegen Polygon rekursiv in kleinere Polygone, bis nur noch Dreiecke vorhanden sind
- Satz von Pick gilt für Dreiecke
- Verschmelzen die Dreiecke zu größeren Polygonen, für die jeweils der Satz von Pick gilt
- Der Satz von Pick gilt für das Polygon P $\blacksquare$

Quellen

- Davis, Tom: Pick's Theorem, 2003.
  http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf (30.01.2012)