Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

6. Februar 2014

Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 12

Zu bearbeiten bis 13. Februar 2014

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass es eine Σ_1-Formel φ gibt, so dass es keine zu $\neg\varphi$ bezüglich des Standardmodells $\mathcal{N}$ der Arithmetik äquivalente Σ_1-Formel gibt.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Warum zeigt der Beweis von Lemma 10.12 (a) nicht sogar, dass jede Σ_1-definierbare Funktion in Q repräsentierbar ist?

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, seien $r, s \in \mathbb{N}$ und sei R ein r-stelliges Relationssymbol mit $R \notin \sigma$.

Eine $\mathrm{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ heißt *im Endlichen monoton in R*, wenn für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle Relationen $R_1^{\mathfrak{A}}, R_2^{\mathfrak{A}} \subseteq A^r$ gilt:

$$\text{Falls} \quad R_1^{\mathfrak{A}} \subseteq R_2^{\mathfrak{A}}, \quad \text{so} \quad \varphi\big(\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}}\big) \subseteq \varphi\big(\mathfrak{A}, R_2^{\mathfrak{A}}\big),$$

wobei $\varphi(\mathfrak{A}, R_i^{\mathfrak{A}}) := \{\bar{a} \in A^s : (\mathfrak{A}, R_i^{\mathfrak{A}}) \models \varphi[\bar{a}]\}$.

Beweisen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist.

MONOTONIE IM ENDLICHEN:
Eingabe: Eine $\mathrm{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$.
Frage: Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ im Endlichen monoton in R?

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Trakhtenbrot.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Der Beweis des Satzes von Trakhtenbrot aus der Vorlesung zeigt lediglich, dass das endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO[σ_{Ar}]-Formeln unentscheidbar ist. Vervollständigen Sie den Beweis, indem Sie zeigen, dass das endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO[E]-Formeln unentscheidbar ist, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation beliebiger σ_{Ar}-Strukturen durch knoten- und kantengefärbte gerichtete Graphen, repräsentiert durch Strukturen über einer geeigneten relationalen Signatur $\hat{\sigma}$, deren Relationssymbole alle eine Stelligkeit $\leqslant 2$ haben. Benutzen Sie die Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für FO[σ_{Ar}]-Sätze, um die Unentscheidbarkeit des endlichen Erfüllbarkeitsproblems für FO[$\hat{\sigma}$]-Sätze zu beweisen. Anschließend können Sie den Beweis abschließen, indem Sie sich eine geeignete Repräsentation von knoten- und kantengefärbten Graphen durch (ungefärbte) gerichtete Graphen überlegen.