Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

30. Januar 2014

Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 11

Zu bearbeiten bis 6. Februar 2014

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Arbeiten Sie die Details der Konstruktion der Formel $\varphi^M_{\text{Schritt}}$ aus Lemma 9.19 aus dem Skript aus.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Welche der folgenden Relationen bzw. partiellen Funktionen sind Σ_1-definierbar, welche nicht? Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(a) $\exp\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \exp(a,b) \ := \ a^b \quad (\text{f.a. } a,b \in \mathbb{N})$

(b) $\mathrm{H} \ := \ \{n_M \ : \ M$ ist eine Turing-Maschine, deren Zustandsmenge eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, die bei leerer Eingabe nach endlich vielen Schritten anhält$\}$

(Hierbei bezeichnet $n_M \in \mathbb{N}$ die Gödelnummer einer Turingmaschine M bezüglich einer geeigneten Gödelisierung von Turingmaschinen).

(c) $\overline{\mathrm{H}} \ := \ \mathbb{N} \setminus \mathrm{H}$

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie die Korrektheit der Aussage von Bemerkung 9.22 aus dem Skript, d.h. zeigen Sie:

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Eine partielle Funktion f von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ ist genau dann TM-berechenbar, wenn sie Σ_1-definierbar ist.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann TM-rekursiv aufzählbar, wenn sie Σ_1-definierbar ist.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

(a) Beweisen Sie Satz 9.25 aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass gilt: Wenn σ eine relationale Signatur ist, die ausschließlich aus Relationssymbolen der Stelligkeit 1 besteht, so ist das endliche Erfüllbarkeitsproblem für FO[σ] entscheidbar.

(b) Sei σ eine relationale Signatur. Ein $\exists^*\forall^*$-*Satz* ist ein FO[σ]-Satz der Gestalt $\exists x_1 \ldots \exists x_m \forall y_1 \ldots \forall y_n\ \varphi$, für $n, m \in \mathbb{N}$, wobei φ eine quantorenfreie Formel ist.

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass das folgende Problem entscheidbar ist:

> ERFÜLLBARKEITSPROBLEM FÜR $\exists^*\forall^*$-SÄTZE
>
> *Eingabe:* Ein $\exists^*\forall^*$–Satz φ.
>
> *Frage:* Ist φ erfüllbar?
>
> *Formal:* Erf-$\exists^*\forall^* := \{\varphi : \varphi$ ist ein erfüllbarer $\exists^*\forall^*$–Satz$\}$

Es handelt sich hierbei um ein Ergebnis von F. P. Ramsey, für dessen Lösung er 1928 den berühmten *Satz von Ramsey* bewiesen hat. Wir verfolgen allerdings einen leichteren Lösungsansatz:

(i) Zeigen Sie: Jede FO[σ]-Formel φ der Form $\forall y_1 \ldots \forall y_n\ \psi$ mit $\text{frei}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_m\}$, für $m, n \in \mathbb{N}$ und eine quantorenfreie Formel ψ, wird *unter induzierten Substrukturen bewahrt*, d.h. für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$, alle $\vec{a} := (a_1, \ldots, a_m) \in A^m$ und jede Menge $U \subseteq A$ mit $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq U$ gilt: $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \models \varphi \implies (\mathfrak{A}_{|U}, \vec{a}) \models \varphi$.

(ii) Zeigen Sie: Wenn ein $\exists^*\forall^*$-Satz φ erfüllbar ist, dann hat er ein Modell mit einem Universum der Größe $O(\|\varphi\|)$.

(iii) Folgern Sie, dass Erf-$\exists^*\forall^*$ entscheidbar ist.