Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

16. Januar 2014

# Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

# Übungsblatt 10

*Zu bearbeiten bis 23. Januar 2014*

**Aufgabe 1:** **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Bemerkung 8.17 aus dem Skript, das heißt zeigen Sie Folgendes: Sei $\sigma$ eine beliebige Signatur und sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\sigma$-Struktur. Dann gilt:

**(a)** Ist $\mathfrak{A}$ endlich, so gilt für alle $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{B}$: $\quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

**(b)** Ist $\mathfrak{A}$ unendlich, so gibt es eine $\sigma$-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} \not\cong \mathfrak{A}$.

**Hinweis:** Für (b) können Sie den aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem benutzen. Für (a) können Sie folgendermaßen vorgehen: Nutzen Sie Aufgabe 2 von Übungsblatt 1 , um zu zeigen, dass (a) für *endliche* Signaturen gilt. Folgern Sie daraus, dass für *beliebige* Signaturen gilt: Falls $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, so ist $|B| = |A|$. Folgern Sie daraus, dass (a) für abzählbare Signaturen gilt. Folgern Sie dann, dass (a) auch für beliebige Signaturen gilt.

**Aufgabe 2:** **(25 Punkte)**

Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$, und sei $\mathfrak{B}$ die $\{\leqslant\}$-Struktur mit Universum

$$B \ := \ \big(\{0\} \times \mathbb{N}\big) \cup \big(\{1\} \times \mathbb{Z}\big)$$

und Relation

$$\leqslant^{\mathfrak{B}} \ := \ \{\big((i,j),(i',j')\big) \in B \times B \ : \ i < i' \text{ oder } \big(i = i' \text{ und } j \leqslant j'\big)\}.$$

Sind die Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

**Hinweis:** Sie können Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele benutzen.

**Aufgabe 3:** **(25 Punkte)**

Berechnen Sie die Gödelnummern der $\sigma_{\text{Ar}}$–Terme $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$ und $\underline{3}$.

*— auf der nächsten Seite geht's weiter —*

**Aufgabe 4:** **(25 Punkte)**

Sei $A$ ein endliches Alphabet. Für eine Menge $L \subseteq A^*$ sei $\bar{L} := A^* \setminus L$.

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

**(a)** Eine Menge $L \subseteq A^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

**(b)** Jede entscheidbare Menge $L \subseteq A^*$ ist rekursiv aufzählbar.

**(c)** Eine Menge $L \subseteq A^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl $L$ als auch $\bar{L}$ semi-entscheidbar sind.

**(d)** Wenn eine Menge $L \subseteq A^*$ semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar ist, dann ist $\bar{L}$ nicht semi-entscheidbar.

**(e)** Sind $L_1 \subseteq A^*$ und $L_2 \subseteq A^*$ rekursiv aufzählbare Mengen, so ist auch die Menge $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar.