Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

10. Dezember 2013

Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 8

Zu bearbeiten bis 19. Dezember 2013

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für die Regel

$$(\exists\mathrm{A}):\quad \frac{\Gamma,\ \varphi\frac{y}{x} \;\vdash\; \psi}{\Gamma,\ \exists x\,\varphi \;\vdash\; \psi} \quad \text{falls } y \notin \mathrm{frei}(\Gamma,\ \exists x\,\varphi,\ \psi)$$

des Sequenzenkalküls $\mathcal{S}$ gilt: Wenn die Voraussetzung korrekt ist, dann ist die Konsequenz korrekt.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Regel $\dfrac{\Gamma,\ \varphi,\ \psi \;\vdash\; \chi}{\Gamma \;\vdash\; \big((\varphi \land \psi) \to \chi\big)}$ im Sequenzenkalkül $\mathcal{S}$ ableitbar ist.

Aufgabe 3: **($10 + 15 = 25$ Punkte)**

Betrachten Sie die Regel

$$(\forall\exists)\quad \frac{}{\Gamma,\ \exists x\,\varphi \;\vdash\; \forall x\,\varphi}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Regel $(\forall\exists)$ im Sequenzenkalkül $\mathcal{S}$ ableitbar ist.

(b) Sei $\mathcal{S}'$ der Kalkül, der aus dem Sequenzenkalkül $\mathcal{S}$ durch Hinzufügen der Regel $(\forall\exists)$ entsteht. Prüfen Sie, ob jede Sequenz in $\mathcal{S}'$ ableitbar ist.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **($11 + 9 + 5 = 25$ Punkte)**

Eine *Aussagenvariable* hat die Form V_i, für ein $i \in \mathbb{N}$. Die Menge AL der *aussagenlogischen Formeln* ist folgendermaßen induktiv definiert:

- $V_i \in \mathrm{AL}$, für jede Aussagenvariable V_i.
- Wenn $\varphi \in \mathrm{AL}$ ist, so ist auch $\neg\varphi \in \mathrm{AL}$.
- Wenn $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{AL}$ sind, so ist auch $(\varphi_1 \to \varphi_2) \in \mathrm{AL}$.

Eine *Belegung* ist eine Abbildung $\mathcal{B} : \{V_i : i \in \mathbb{N}\} \to \{0, 1\}$. Der *Wahrheitswert* $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} \in \{0, 1\}$ von φ bezüglich $\mathcal{B}$ ist folgendermaßen definiert:

- Für $i \in \mathbb{N}$ ist $[\![V_i]\!]^{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(V_i)$.
- Für $\psi \in \mathrm{AL}$ ist $[\![\neg\psi]\!]^{\mathcal{B}} = 0$, falls $[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$, und $[\![\neg\psi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$ sonst.
- Für $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{AL}$ ist $[\![(\psi_1 \to \psi_2)]\!]^{\mathcal{B}} = 0$, falls $[\![\psi_1]\!]^{\mathcal{B}} = 1$ und $[\![\psi_2]\!]^{\mathcal{B}} = 0$, und $[\![(\psi_1 \to \psi_2)]\!]^{\mathcal{B}} = 1$ sonst.

Eine Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ ist *allgemeingültig*, falls $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$ für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt. Für $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ und $\psi \in \mathrm{AL}$ schreiben wir $\Phi \models \psi$, wenn für jede Belegung $\mathcal{B}$, so dass $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$ für jedes $\varphi \in \Phi$, auch $[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$ gilt.

Wir betrachten im Folgenden Kalküle (vgl. Kapitel 7.1 im Skript) über $M := \mathrm{AL}$. Wir schreiben $\Phi \vdash_\kappa \psi$ um auszudrücken, dass es eine Ableitung von ψ aus Φ im Kalkül κ gibt (vgl. Definition 7.3). Ein Kalkül κ über AL heißt *korrekt*, falls für jede Menge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ und jede Formel $\psi \in \mathrm{AL}$ gilt: falls $\Phi \vdash_\kappa \psi$, so gilt $\Phi \models \psi$. Ein Kalkül κ über AL heißt *vollständig*, falls für jede Menge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ und jede Formel $\psi \in \mathrm{AL}$ gilt: falls $\Phi \models \psi$, so gilt $\Phi \vdash_\kappa \psi$.

Seien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{A}$ die beiden folgenden Kalküle über der Menge AL. Beide Kalküle enthalten für jede allgemeingültige Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ die Ableitungsregel $\dfrac{}{\varphi}$.

Außerdem enthalte

- $\mathcal{A}$ für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ die Regel $\dfrac{\begin{array}{c}\psi \\ (\varphi \to \psi)\end{array}}{\varphi}$, die *Abduktion* genannt wird,
- $\mathcal{S}$ für alle $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{AL}$ die Regel $\dfrac{\begin{array}{c}(\varphi \to \psi) \\ (\psi \to \chi)\end{array}}{(\varphi \to \chi)}$, die *Syllogismus* genannt wird.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ vollständig, aber nicht korrekt ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ korrekt, aber nicht vollständig ist.

(c) Betrachten Sie den Kalkül $\mathcal{K}$ über AL, der alle Ableitungsregeln aus $\mathcal{S}$ und alle Ableitungsregeln aus $\mathcal{A}$ enthält. Geben Sie an, ob $\mathcal{K}$ korrekt bzw. vollständig ist.