

Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten bis 12. Dezember 2013

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $\mathfrak{G}_{k,\ell}$ das in Aufgabe 3 von Übungsblatt 4 definierte $(k \times \ell)$ -Gitter. Sei *Diag* die *einstellige* Anfrage, die jedem Gitter $\mathfrak{G}_{k,\ell}$ die Diagonale

$$\text{Diag}(\mathfrak{G}_{k,\ell}) := \{(i, i) : 1 \leq i \leq \min(k, \ell)\}$$

zuordnet.

Zeigen Sie: Die Anfrage *Diag* ist nicht FO[σ]-definierbar.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur σ , jede Klasse S von σ -Strukturen und jede Anfrage Q gilt:

$$Q \text{ ist FO}[\sigma]\text{-definierbar auf } S \implies Q \text{ ist Gaifman-lokal auf } S.$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Anfrage Q :

$$Q \text{ ist Gaifman-lokal auf } S \implies Q \text{ ist FO}[\sigma]\text{-definierbar auf } S ?$$

Belegen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder beweisen, dass die Umkehrung gilt, oder indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Finden Sie einen auf dem Satz von Hanf beruhenden Beweis der folgenden Variante des Satzes von Seese:

Für jede Zahl $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und jeden FO[E]-Satz φ gibt es einen Algorithmus, der das

AUSWERTUNGSPROBLEM FÜR φ AUF DER KLASSE ALLER ENDLICHEN GRAPHEN
VOM GRAD $\leq d$

Eingabe: Ein endlicher Graph G vom Grad $\leq d$

Frage: Gilt $G \models \varphi$?

in Zeit $\mathcal{O}(n)$ löst, wobei $n = |V^G| + |E^G|$ für $G = (V^G, E^G)$ ist.

Aufgabe 4:**(5 + 5 + 15 = 25 Punkte)**

- (a) Welche Sprache beschreibt der folgende sternfreie reguläre Ausdruck über dem Alphabet $\{a, b\}$:

$$\overline{\overline{(a \cdot b \cdot \emptyset) \mid \emptyset \cdot b \cdot a} \mid \emptyset \cdot b \cdot b \cdot \emptyset}.$$

- (b) Geben Sie einen sternfreien regulären Ausdruck an, der die selbe Sprache beschreibt, wie der reguläre Ausdruck $(ab)^+$.
- (c) Sei Σ ein endliches Alphabet und sei SFR_Σ (vgl. Definition 6.6 aus der Vorlesung) die Klasse aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ . Zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Für jeden sternfreien regulären Ausdruck $r \in \text{SFR}_\Sigma$ gibt es einen $\text{FO}[\sigma_\Sigma]$ -Satz, der die Sprache $L(r)$ beschreibt.