Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

21. November 2013

Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

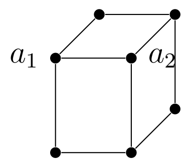
Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis 28. November 2013

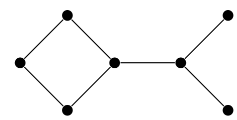
Aufgabe 1: **($7 + 9 + 9 = 25$ Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Graphen $\mathcal{G} := (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ und $\mathcal{H} := (V^{\mathcal{H}}, E^{\mathcal{H}})$.

Graph $\mathcal{G}$:



Graph $\mathcal{H}$:



(a) Finden Sie $b_1, b_2 \in V^{\mathcal{H}}$, so dass $(a_1, a_2 \mapsto b_1, b_2) \in \text{Part}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.

(b) Was ist das größte m, so dass es $b_1, b_2 \in V^{\mathcal{H}}$ gibt mit $(\mathcal{G}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{H}, b_1, b_2)$? Belegen Sie Ihre Aussage, indem Sie für Ihre Zahl m geeignete Elemente $b_1, b_2 \in V^{\mathcal{H}}$ und ein Hin- und Her-System $(I_j)_{j \leqslant m}$: $(\mathcal{G}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{H}, b_1, b_2)$ angeben.

(c) Beweisen Sie, dass ein größeres als das von Ihnen angegebene m nicht möglich ist.

Aufgabe 2: **($11 + 14 = 25$ Punkte)**

Stellen Sie für jede der beiden folgenden Formeln fest, ob sie in Gaifman-Normalform ist. Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls eine äquivalente Formel in Gaifman-Normalform an.

(a) $\varphi_1(x) \quad := \quad \forall y\, E(x, y)$

(b) $\varphi_2(x_1, x_2) \quad := \quad \neg x_1{=}x_2 \wedge \forall y \Big(E(x_1, y) \vee E(x_2, y)\Big)$

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei M eine endliche Menge von Formeln. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe einer beliebigen Formel $\varphi \in \text{BC}(M)$ eine zu φ äquivalente Formel in disjunktiver Normalform ausgibt, d.h. eine Formel der Form

$$\bigvee_{i \in I} \Bigg(\bigwedge_{j \in J_i} \psi_{i,j} \Bigg),$$

wobei I und $(J_i)_{i \in I}$ endliche Indexmengen sind und $\psi_{i,j} \in M \cup \{\neg\chi : \chi \in M\}$, für alle $i \in I$ und alle $j \in J_i$.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Entwickeln Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe von zwei Zahlen $k, r \in \mathbb{N}_{>0}$ und einer FO[σ]-Formel $\psi(x_1, \ldots, x_k, y)$, die r-lokal um $x_1, \ldots, x_k, y$ ist, eine FO[σ]-Formel $\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_k, y)$ ausgibt, für die gilt:

(I) $\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_k, y)$ ist eine Boolesche Kombination von

  (i) Formeln, die r-lokal um $x_1, \ldots, x_k$ sind, und

  (ii) Formeln, die r-lokal um y sind,

  und

(II) für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $a_1, \ldots, a_k, b \in A$ mit $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(b, \{a_1, \ldots, a_k\}) > 2r + 1$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \tilde{\psi}[a_1, \ldots, a_k, b] \iff \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_k, b].$$