Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

14. November 2013

Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 5

Zu bearbeiten bis 21. November 2013

Aufgabe 1: **(12 + 13 = 25 Punkte)**

Verwenden Sie die Methode der logischen Reduktionen, um die folgenden Aufgaben zu lösen:

(a) Sei RGRAPHS die Klasse aller endlichen Graphen $G = (V, E^G, s^G, t^G)$ mit $s^G,\ t^G \in V$. Sei REACH die Klasse aller $G \in$ RGRAPHS, in denen es einen Weg vom Knoten s^G zum Knoten t^G gibt.

Zeigen Sie: REACH ist nicht FO[σ]-definierbar in RGRAPHS.

(b) Sei $\sigma = \{\leqslant, P_a, P_b\}$ wie in Aufgabe 4 auf Blatt 1 gewählt. Beweisen sie, dass es keinen FO[σ]-Satz gibt, der die Sprache aller Worte aus $\{a, b\}^*$ beschreibt, in denen die Anzahl der in ihnen vorkommenden as gerade ist.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse $\text{C} \subseteq \text{S}$ gilt:

$$\text{C ist FO}[\sigma]\text{-definierbar in S} \quad \Rightarrow \quad \text{C ist Hanf-lokal in S.}$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse $\text{C} \subseteq \text{S}$:

$$\text{C ist Hanf-lokal in S} \quad \Rightarrow \quad \text{C ist FO}[\sigma]\text{-definierbar in S ?}$$

Belegen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder beweisen, dass die Umkehrung gilt, oder indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 3: **(11 + 14 = 25 Punkte)**

Für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ sei k-COL die Klasse aller k-färbbaren endlichen ungerichteten Graphen. Zeigen Sie:

(a) 2-COL ist nicht FO-definierbar in UGRAPHS

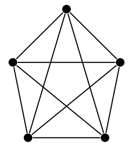
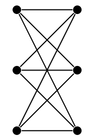
(b) 3-COL ist nicht FO-definierbar in UGRAPHS.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Sei Planar die Klasse aller endlichen ungerichteten planaren Graphen. Zeigen Sie, dass Planar nicht FO-definierbar in UGraphs ist.

Hinweis: Gemäß dem Satz von Kuratowski ist ein endlicher ungerichteter Graph G genau dann planar, wenn er keine Unterteilung eines der folgenden Graphen als Subgraphen enthält:

$K_5 \ :=$  $K_{3,3} \ :=$ 

Ein Graph G' geht durch Unterteilung einer Kante $e := \{u, v\} \in E$ aus $G = (V, E)$ hervor, falls $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\})$ für einen Knoten $w \notin V$. Ein Graph U ist eine *Unterteilung* eines Graphen G, wenn es eine Folge $G_1, \ldots, G_\ell$ von Graphen mit $\ell \geqslant 1$ gibt, so dass gilt: $G_1 = G$, $G_\ell = U$, und für jedes $i \in \{2, \ldots, \ell\}$ geht G_i aus G_{i-1} durch Unterteilung einer Kante von G_{i-1} hervor.

Beispiel: Eine Unterteilung von K_5