Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

7. November 2013

Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 4

Zu bearbeiten bis 14. November 2013

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{P, Q\}$ für einstellige Relationssymbole P und Q. Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\mathfrak{A}_{k,\ell}$ eine σ-Struktur mit Universum $A_{k,\ell} = P^{\mathfrak{A}_{k,\ell}} \cup Q^{\mathfrak{A}_{k,\ell}}$, wobei $P^{\mathfrak{A}_{k,\ell}} \cap Q^{\mathfrak{A}_{k,\ell}} = \emptyset$, $|P^{\mathfrak{A}_{k,\ell}}| = k$ und $|Q^{\mathfrak{A}_{k,\ell}}| = \ell$ ist.

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_{k_0,\ell_0} \equiv_m \mathfrak{A}_{k_1,\ell_1}$ genau dann gilt, wenn

$$(k_0 = k_1 \quad \text{oder} \quad k_0, k_1 \geqslant m) \quad \text{und} \quad (\ell_0 = \ell_1 \quad \text{oder} \quad \ell_0, \ell_1 \geqslant m).$$

Aufgabe 2: **(13 + 12 = 25 Punkte)**

Sei σ eine funktionenfreie Signatur und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen.

- Die Struktur $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ ist die σ-Struktur mit Universum $A \times B$, Konstanten $c^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}})$ (f.a. Konstantensymbole $c \in \sigma$) und Relationen

$$R^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} \;:=\; \Big\{ \big((a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r)\big) \;:\; (a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ und } (b_1, \ldots, b_r) \in R^{\mathfrak{B}} \Big\}$$

  (f.a. Relationssymbole $R \in \sigma$ mit $r := ar(R)$).

- Falls σ kein Konstantensymbol enthält und A und B disjunkt sind, so ist $\mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$ die σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ und Relationen $R^{\mathfrak{A}\sqcup\mathfrak{B}} := R^{\mathfrak{A}} \cup R^{\mathfrak{B}}$ (f.a. $R \in \sigma$).

Es sei $m \in \mathbb{N}$, und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ seien σ-Strukturen.

Nutzen Sie die EF-Spiel-Charakterisierung von $\equiv_m$, um Folgendes zu zeigen:

(a) Falls $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$, so auch $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.

(b) Falls σ kein Konstantensymbol enthält und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ist, so gilt:
Falls $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$, so auch $\mathfrak{A}_1 \sqcup \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \sqcup \mathfrak{B}_2$.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{S_v, S_h\}$ mit zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h. Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{>0}$ ist das $(k{\times}\ell)$-*Gitter* $\mathfrak{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, \ell\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathfrak{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j),(i{+}1,j)\big) \ : \ 1 \leqslant i < k, \ 1 \leqslant j \leqslant \ell \Big\}, \\ S_h^{\mathfrak{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j),(i,j{+}1)\big) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant k, \ 1 \leqslant j < \ell \Big\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es keinen FO$[\sigma]$-Satz φ gibt, so dass für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$\mathfrak{G}_{k,\ell} \models \varphi \iff k = \ell.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4: **(11 + 14 = 25 Punkte)**

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}$ eine Klasse endlicher σ-Strukturen. Sei φ ein FO$[\sigma]$-Satz. Das *Spektrum von φ in $\mathcal{C}$* ist die Menge $\mathrm{SPEC}_{\mathcal{C}}(\varphi) := \{|A| : \mathfrak{A} \in \mathcal{C}\,,\ \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(a) Für welche Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ gibt es einen FO$[\sigma_{\mathrm{Ord}}]$-Satz, so dass $M = \mathrm{SPEC}_{\mathrm{ORD}_{\leqslant}}(\varphi)$?

(b) Sei σ die leere Signatur (d.h. σ-Strukturen bestehen nur aus ihrem Universum). Für welche Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ gibt es einen FO$[\sigma]$-Satz, so dass $M = \mathrm{SPEC}_{\mathrm{FIN}_\sigma}(\varphi)$?