Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

31. Oktober 2013

Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 3

Zu bearbeiten bis 7. November 2013

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**
Arbeiten Sie die Details des Beweises von Satz 3.9 aus und geben Sie eine detaillierte Analyse des Zeit- und Platzbedarfs Ihres Algorithmus an.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**
Betrachten Sie die folgenden Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

Graph $\mathfrak{A}$: Graph $\mathfrak{B}$:

(a) Welches ist das kleinste m, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(b) Finden Sie für Ihre Antwort m aus Teil (a) einen FO[E]-Satz ψ der Quantorentiefe m, so dass $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi$.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**
Beweisen Sie Satz 4.8, d.h. zeigen Sie:
Für alle funktionenfreien Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\vec{a}' := a'_1, \ldots, a'_k \in A$ und $\vec{b}' := b'_1, \ldots, b'_k \in B$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

> Genau einer der beiden Spieler (Spoiler bzw. Duplicator) hat eine Gewinnstrategie im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Hinweis: Per Induktion nach m ist der Beweis einfach und kurz.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**
Beweisen Sie die Richtung "$\Longrightarrow$" von Satz 4.11, d.h. zeigen Sie:
Für jedes $m \geqslant 1$ und für alle geordneten endlichen Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \leqslant^{\mathfrak{A}}, \min^{\mathfrak{A}}, \max^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \leqslant^{\mathfrak{B}}, \min^{\mathfrak{B}}, \max^{\mathfrak{B}})$ gilt: Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat *Spoiler* eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.