

Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 3

Zu bearbeiten bis 7. November 2013

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

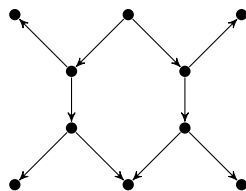
Arbeiten Sie die Details des Beweises von Satz 3.9 aus und geben Sie eine detaillierte Analyse des Zeit- und Platzbedarfs Ihres Algorithmus an.

Aufgabe 2:

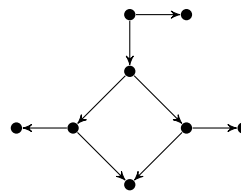
(25 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Graphen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} :

Graph \mathfrak{A} :



Graph \mathfrak{B} :



- Welches ist das kleinste m , so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m -Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf \mathfrak{A} und \mathfrak{B} hat? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
- Finden Sie für Ihre Antwort m aus Teil (a) einen FO[E]-Satz ψ der Quantortiefe m , so dass $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi$.

Aufgabe 3:

(25 Punkte)

Beweisen Sie Satz 4.8, d.h. zeigen Sie:

Für alle funktionenfreien Signaturen σ , alle σ -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\vec{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A$ und $\vec{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

Genau einer der beiden Spieler (Spoiler bzw. Duplicator) hat eine Gewinnstrategie im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Hinweis: Per Induktion nach m ist der Beweis einfach und kurz.

Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Beweisen Sie die Richtung " \implies " von Satz 4.11, d.h. zeigen Sie:

Für jedes $m \geq 1$ und für alle geordneten endlichen Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}}, \min^{\mathfrak{A}}, \max^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \leq^{\mathfrak{B}}, \min^{\mathfrak{B}}, \max^{\mathfrak{B}})$ gilt: Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leq 2^m$, so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf \mathfrak{A} und \mathfrak{B} .