Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

17. Oktober 2013

Logik in der Informatik

Wintersemester 2013/14

Übungsblatt 1

Zu bearbeiten bis 24. Oktober 2013

Aufgabe 1: **($7 + 7 + 7 + 7 = 28$ Punkte)**

(a) Geben Sie FO[σ_{Graph}]-Formeln an, die in einem endlichen Graphen G folgende intuitive Bedeutung haben:

(i) G enthält genau zwei isolierte Knoten. (*Zur Erinnerung:* Ein isolierter Knoten ist ein Knoten, der keine Nachbarn besitzt)

(ii) G enthält keinen Kreis der Länge drei.

(b) Geben Sie FO[σ_{Ar}]-Formeln an, die im Standardmodell $\mathcal{N}$ der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:

(i) Es gibt unendlich viele Sophie Germain Primzahlen, d.h. Primzahlen p, so dass $2p + 1$ auch prim ist.

(ii) Jede Primzahl ist die Summe zweier Quadratzahlen.

Aufgabe 2: **($13 + 12 = 25$ Punkte)**

Sei σ eine Signatur, die aus endlich vielen Symbolen besteht, und sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur, deren Universum A endlich ist.

(a) Geben Sie einen FO[σ]-Satz $\varphi_{\mathfrak{A}}$ an, der die Struktur $\mathfrak{A}$ bis auf Isomorphie eindeutig beschreibt. D.h. es soll für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$ gelten: $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

(b) Beweisen Sie, dass ihre Formel $\varphi_{\mathfrak{A}}$ die in (a) geforderte Eigenschaft tatsächlich besitzt. D.h. zeigen Sie, dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

Aufgabe 3: **(22 Punkte)**

Beweisen Sie das Isomorphielemma (Satz 1.36 aus der Vorlesung).

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **(10 + 10 + 5 = 25 Punkte)**

Sei $\sigma = \{\leqslant, P_a, P_b\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol $\leqslant$ sowie zwei 1-stelligen Relationssymbolen P_a und P_b besteht.
Einem endlichen Wort $w = w_1 \cdots w_n$ der Länge $n \geqslant 1$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ ordnen wir die folgende σ-Struktur $\mathfrak{A}_w = (A_w, \leqslant^{\mathfrak{A}_w}, P_a^{\mathfrak{A}_w}, P_b^{\mathfrak{A}_w})$ zu:

- $A_w := \{1, \ldots, n\}$,
- $\leqslant^{\mathfrak{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $\{1, \ldots, n\}$,
- $P_a^{\mathfrak{A}_w} := \{\, i \in A_w \ : \ w_i = a \,\}$,
- $P_b^{\mathfrak{A}_w} := \{\, i \in A_w \ : \ w_i = b \,\}$.

Ein FO[σ]-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathfrak{A}_w \models \varphi$.

(a) Welche Sprache beschreibt der folgende FO[σ]-Satz φ_0?

$$\varphi_0 \ := \ \forall x \forall y \Bigg(\bigg(x \leqslant y \ \wedge \ \neg x = y \ \wedge \\ \forall z \ \Big((x \leqslant z \ \wedge \ z \leqslant y) \to (z = y \ \vee \ z = x) \Big) \wedge \ P_a(x) \bigg) \to \ P_b(y) \Bigg)$$

(b) Geben Sie einen FO[σ]-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $(ab)^+$ definierte Sprache beschreibt.

(c) Können Sie auch einen FO[σ]-Satz finden, der die Sprache aller Worte beschreibt, in denen die Anzahl der in ihnen vorkommenden as gerade ist?
Falls ja, geben Sie den Satz an; falls nein, versuchen Sie zu erklären, warum es keinen solchen Satz zu geben scheint.