Logik und Datenbanken

Vorlesung im Wintersemester 2012/13

Isolde Adler
Institut für Informatik
Goethe-Universität Frankfurt

Kapitel 6: Anfragen beschränkter Hyperbaumweite

In Kapitel 2, Theorem 2.46, haben wir gesehen, dass sich azyklische konjunktive Anfragen in Polynomialzeit auswerten lassen. Eine naheliegende Frage ist: Gibt es noch weitere/größere Teilklassen konjunktiver Anfragen, die sich auch in Polynomialzeit auswerten lassen? Die Antwort lautet: ja. In [3] haben Gottlob, Leone und Scarcello die *Hyperbaumweite* eingeführt und gezeigt, dass sich konjunktive Anfagen mit *beschränkter Hyperbaumweite* in Polynomialzeit auswerten lassen. Dieses Resultat werden wir in diesem Kapitel vorstellen.

Die Hyperbaumweite lässt sich durch ein Spiel charakterisieren. Wir benutzen diese Charakterisierung, um die Hyperbaumweite einzuführen.

6.1 Räuber und Gendarmen auf Hypergraphen

6.1 Definition.

- Ein *Hypergraph* ist ein Paar $H = (V, E) = (V(H), E(H))$, bestehend aus einer Menge V von *Knoten*, und einer Menge $E \subseteq 2^V$ von Teilmengen von V, den *Hyperkanten* (oder einfach *Kanten*) von H.

- Ein Hypergraph H_0 heißt *Subhypergraph* von H, in Zeichen $H_0 \subseteq H$, wenn $V(H_0) \subseteq V$ und $E(H_0) \subseteq E$ gilt.

- Der *Gaifman-Graph* eines Hypergraphen $H = (V, E)$ ist der Graph $\mathcal{G}(H)$ mit $V(\mathcal{G}(H)) := V$ und

$$E(\mathcal{G}(H)) := \big\{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v, \text{ es gibt ein } e \in E \text{ mit } \{u, v\} \subseteq e\big\}.$$

Wir betrachen nur Hypergraphen mit endlicher Knotenmenge. Abbildung 6.1 zeigt einen Hypergraphen.

Graphen lassen sich als spezielle Hypergraphen auffassen: Graphen sind genau diejenigen Hypergraphen, bei denen die Hyperkanten zweielementige Teilmengen der Knotenmenge sind.

Man sieht leicht, dass der Gaifman-Graph von H aus H entsteht, indem jede Hyperkante $e \in E(H)$ durch einen vollständigen Graphen auf den Knoten von e ersetzt wird.

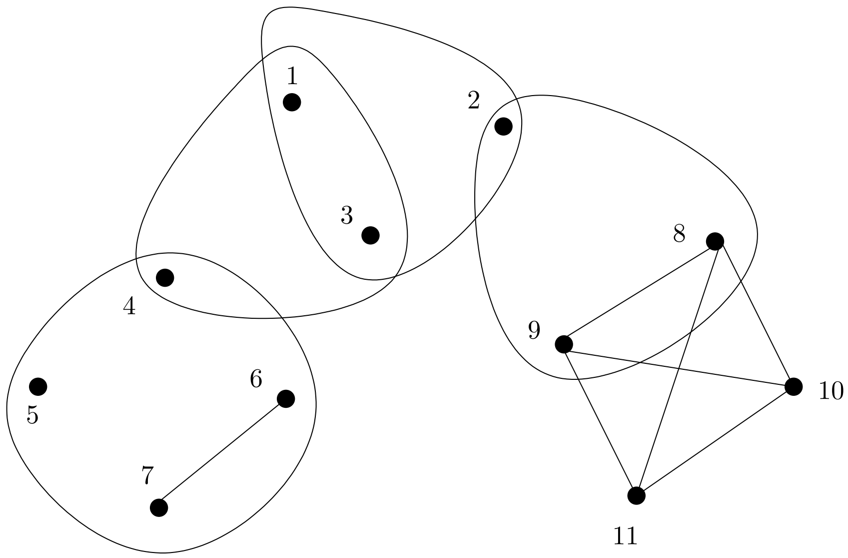

Abbildung 6.1: Ein Hypergraph. Die zweielementigen Hyperkanten sind als Graphkanten eingezeichnet.

6.2 Definition. Sei **R** ein Datenbankschema und sei

$$Q := \mathit{Ans}() \leftarrow R_1(u_1), \ldots, R_\ell(u_\ell)$$

eine Boolesche regelbasierte konjunktive Anfrage über **R**, die keine Konstanten enthält. Der *Anfrage-Hypergraph* von Q ist der Hypergraph H_Q mit Knotenmenge $V(H_Q) = \mathit{Var}(Q)$. Für jedes Atom $R_i(u_i)$ der Stelligkeit > 0 hat H_Q eine Hyperkante, die genau aus den Variablen im Tupel u_i besteht (und es gibt keine weitern Hyperkanten).

Die Einschränkung auf konjunktive Anfragen ohne Konstanten machen wir nur der Einfachheit halber. Man kann alles, was wir im Folgenden beweisen, auch für Anfragen mit Konstanten zeigen.

6.3 Beispiel. Betrachte die Anfragen

- $Q_1 := \ \mathit{Ans}() \leftarrow E(x_P, x_S),\ D(x_P, x_K, x_Z),\ T(x_S, y_K, y_Z)$
- $Q_2 := \ \mathit{Ans}() \leftarrow E(x_P, x_S),\ D(x_P, x_K, x_Z),\ T(x_S, x_K, x_Z)$
- $Q_3 := \ \mathit{Ans}() \leftarrow R(y,z),\ P(x,y),\ S(y,z,u),\ S(z,u,w),\ T(y,z),\ T(z,u),\ R(z',y')$

aus Kapitel 2, Folie 77. Wie sehen die Anfrage-Hypergraphen H_{Q_1}, H_{Q_2} und H_{Q_3} aus?

Das Räuber-und-Gendarmen-Spiel ist ein Spiel auf Hypergraphen, bei dem die Gendarmen einen Räuber fangen müssen. Gottlob, Leone und Scarcello haben es in [3] definiert zur Charakterisierung von Hyperbaumweite. (Das Spiel verläuft ähnlich wie das *Räuber-und-Polizisten-Spiel* auf Graphen [5], das die *Baumweite* des Graphen charakterisiert – mit dem Unterschied, dass die Polizisten auf Punkten ziehen, während die – mächtigeren – Gendarmen auf Hyperkanten ziehen. Das Räuber-und-Polizisten-Spiel und Baumweite werden in der Vorlesung *Baumzerlegungen, Algorithmen und Logik* behandelt.)

Zunächst eine informelle Beschriebung: Im Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf einem Hypergraphen H spielt der *Räuber* gegen k *Gendarmen*. Die Gendarmen bewegen sich koordiniert. Es ist also ein 2-Personen-Spiel. Die Gendarmen ziehen auf Hyperkanten von H und versuchen, den Räuber zu fangen. Wir können uns vorstellen, dass sie in Hubschraubern fliegen. Der Räuber zieht auf Knoten von H, er kann sich dabei nur entlang von Wegen (im Gaifman-Graphen von H) bewegen. Er sieht, wo die Gendarmen hinfliegen wollen, und versucht während des Fluges noch schnell zu entkommen. Er kann dabei beliebig schnell laufen, darf aber nicht solche Knoten verwenden, die vor *und* nach dem Flug durch einen Gendarmen belegt sind. Das Ziel der Gendarmen ist es, den Räuber zu fangen, indem sie eine Hyperkante belegen, die den Räuberknoten enthält. Der Räuber versucht immer zu entkommen.

6.4 Definition. Sei H ein Hypergraph und $k \geqslant 0$. Das *Räuber-und-k-Gendarmen-Spiel auf* H, in Zeichen $\mathrm{RG}(H,k)$, wird von zwei Spielern gespielt: dem *Räuber* und den *Gendarmen*. Eine *Position* des Spiels ist ein Paar (v, M), mit $v \in V(H)$ und $M \subseteq E(H)$, wobei $|M| \leqslant k$ ist.

In der ersten Runde wählt der Räuber einen beliebigen Knoten $v_0 \in V(H)$, die Anfangsposition ist dann $(v_0, \varnothing)$.

In jeder weiteren Runde ziehen die Spieler von der vorherigen Position (v, M) zu einer neuen Position (v', M') wie folgt: Die Gendarmen wählen M', und dann wählt der Räuber v' so, dass es einen Weg von v nach v' gibt im Hypergraphen

$$H \setminus \left(\bigcup M \cap \bigcup M'\right).$$

Wenn eine Position (v, M) erreicht wird mit $v \in \bigcup M$, so endet das Spiel und die Gendarmen gewinnen. Geht das Spiel immer weiter, so gewinnt der Räuber.

6.5 Bemerkung. Man überlegt sich leicht, dass in Position (v, M) der nächste Zug M' der Gendarmen nur von M und der Zusammenhangskomponente R von v in $H \setminus \bigcup M$ abhängt.

Ähnlich sieht man, dass der nächste Zug v' des Räubers nur von R, M und M' abhängt.

6.6 Definition. Sei H ein Hypergraph und $k \geqslant 0$.

- Sei $M \in [E(H)]^{\leqslant k}$. Eine Zusammenhangskomponente R von $H \setminus \bigcup M$ heißt *Fluchtraum bezüglich M*.

- Sei (v, M) eine Spielposition von $\mathrm{RG}(H, k)$, und sei R der Fluchtraum bezüglich M, der v enthält. Die Gendarmen machen einen *monotonen* Zug, wenn sie eine neue Menge $M' \in [E(H)]^{\leqslant k}$ so wählen, dass für jeden Fluchtraum R' bezüglich M', den der Räuber von R aus erreichen kann, gilt: $R' \subsetneq R$.
- Das *monotone Räuber-und-k-Gendarmen-Spiel* ist die Variante von $\mathrm{RG}(H, k)$, in der die Gendarmen nur monotone Züge machen dürfen.

Monotonie ist also eine zusätzliche Auflage an die Gendarmen, die es ihnen höchstens schwerer macht, den Räuber zu fangen.

6.7 Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$.

- Ist G ein Baum mit mindestens einer Kante, so kann der Gendarm das (monotone) Spiel $\mathrm{RG}(G, 1)$ gewinnen.
- Sei Z_n der Kreis mit $n \geqslant 3$ Knoten. Dann können 2 Gendarmen auf Z_n monoton gewinnen:
  Der eine Gendarm stellt sich die ganze Zeit auf eine Kante, während der andere, beginnend auf einer benachbarten Kante, einmal im Kreis alle Kanten abläuft.
- Sei H_n der Hypergraph mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ und Kantenmenge $\big\{\{1, \dots, n\}\big\}$. Dann kann der Gendarm monoton auf H_n gewinnen.

Bemerkung 6.5 erlaubt uns die folgende Definition von Gewinnstrategie.

6.8 Definition. Sei $H = (V, E)$ ein Hypergraph und $k \geqslant 0$. Eine *Gewinnstrategie für die Gendarmen* im Spiel $\mathrm{RG}(H, k)$ ist ein Tripel $\big(T, (\lambda_t)_{t\in V(T)}, (\rho_t)_{t\in V(T)}\big)$ wobei T ein gerichteter Baum ist, $\lambda_t \in [E]^{\leqslant k}$ und $\rho_t \subseteq V$ für alle $t \in V(T)$. Zusätzlich gilt:

- Ist w die Wurzel, so ist $\rho_w = V$.
- Ist s Nachfolger von t in T, so ist ρ_s ein Fluchtraum bzgl. λ_t, den der Räuber von ρ_t aus erreichen kann, während die Gendarmen von $\lambda_{\mathrm{vorg}(t)}$ nach λ_t fliegen.
- Für jeden Knoten t und jeden Fluchtraum R, den der Räuber von ρ_t aus erreichen kann während die Gendarmen von $\lambda_{\mathrm{vorg}(t)}$ nach λ_t fliegen, gibt es genau einen Nachfolger s von t mit $\rho_s = R$.

Für $t \neq w$ bezeichnet $\mathrm{vorg}(t)$ hierbei den Vorgänger von t. Falls $t = w$ ist, setzen wir $\lambda_{\mathrm{vorg}(t)} := \varnothing$.

6.9 Definition. Eine Gewinnstrategie für die Gendarmen ist *monoton*, wenn in jedem Spiel, das gemäß der Strategie gespielt wird, und in jedem Zug, etwa von Position (v, M) nach Position (v', M'), die Zusammenhangskomponente von v' in $H \setminus M'$ eine echte Teilmenge der Zusammenhangskomponente von v in $H \setminus M$ ist.

Abbildung 6.2 zeigt eine monotone Gewinnstrategie für 2 Gendarmen auf dem Hypergraphen H aus Abbildung 6.1. Die Fluchträume des Räubers sind durch eines ihrer Elemente gekennzeichnet.

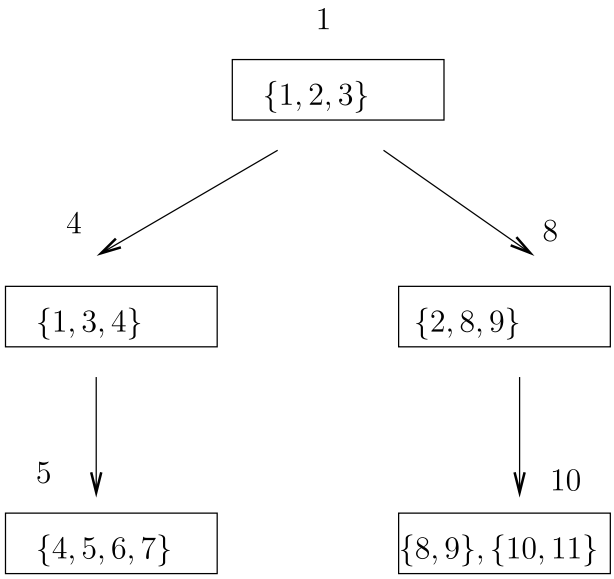

Abbildung 6.2: Eine monotone Gewinnstrategie für die Gendarmen im Spiel RG$(H, 2)$ für den Hypergraphen H aus Abbildung 6.1.

Intuitiv ist eine Strategie für die Gendarmen monoton, wenn sich der Fluchtraum des Räubers während des gesamten Spiels nicht vergrößert.

6.10 Definition. Sei H ein Hypergraph.

- Die *Gendarmen-Zahl* von H, $\mathrm{gz}(H)$, ist das kleinste k, so dass die Gendarmen eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{RG}(H, k)$ haben.
- Die *monotone Gendarmen-Zahl* von H, $\text{mon-gz}(H)$, ist das kleinste k, so dass die Gendarmen eine monotone Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{RG}(H, k)$ haben.

6.11 Beispiel. Für den Hypergraphen H aus Abbildung 6.1 gilt

$$\mathrm{gz}(H) = \text{mon-gz}(H) = 2.$$

6.12 Bemerkung. Für jeden Hypergraphen H gilt $\mathrm{gz}(H) \leqslant \text{mon-gz}(H)$.

6.13 Beispiel. Für die Anfragen Q_1, Q_2 und Q_3 aus Beispiel 6.3 gilt: $\mathrm{gz}(H_{Q_1}) = \text{mon-gz}(H_{Q_1}) = 1$, $\mathrm{gz}(H_{Q_2}) = \text{mon-gz}(H_{Q_2}) = 2$ und $\mathrm{gz}(H_{Q_3}) = \text{mon-gz}(H_{Q_3} = 1)$.

Gibt es Hypergraphen H mit $\mathrm{gz}(H) \neq \text{mon-gz}(H)$? Sie können selber versuchen die Antwort zu finden, oder in [1] nachschauen.

6.14 Theorem. *Sei Q eine regelbasierte konjunktive Anfrage. Es gilt: Q ist genau dann azyklisch, wenn* $\text{mon-gz}(H_Q) \leqslant 1$.

Beweisidee. Ist Q azyklisch, so hat Q einen Join-Baum. Aus dem Join-Baum lässt sich eine monotone Gewinnstrategie für einen Gendarmen ablesen. Andersherum liefert eine monotone Gewinnstrategie für einen Gendarmen einen Join-Baum für Q. □

Es ist eine offene Frage, ob man in Theorem 6.14 '$\text{mon-gz}(H_Q) \leqslant 1$' durch '$\text{gz}(H_Q) \leqslant 1$' ersetzen kann.

6.15 Theorem. *Sei $k \geqslant 1$. Das folgende Problem lässt sich in Polynomialzeit entscheiden.*

RG(k)	
Eingabe:	Hypergraph H.
Problem:	Haben die Gendarmen eine monotone Gewinnstrategie in $\text{RG}(H, k)$?

Der Algorithmus lässt sich so erweitern, dass er eine monotone Gewinnstrategie für k Gendarmen berechnet, falls es eine gibt.

Beachte: Insbesondere ist die Größe der Gewinnstrategie polynomiell in $\|H\|$.

Beweisidee. Konstruiere rückwärts alle Spielpositionen, von denen aus dir Gendarmen in $0, 1, 2, \ldots$ Zügen gewinnen können. □

6.2 Anfragen mit beschränkter Hyperbaumweite

In diesem Abschnitt führen wir die Hyperbaumweite ein. Die Definition mag zunächst etwas technisch wirken. Da sich die Hyperbauweite aber durch die Gendarenzahl charakterisieren lässt, haben wir bereits eine gute Vorstellung davon, was sie beschreibt.

Schließlich zeigen wir, dass sich konjunktive Anfragen, deren Anfrage-Hypergraph beschränkte Hyperbaumweite hat, in Polynomialzeit auswerten lassen.

6.16 Definition. Eine *Hyperbaumzerlegung* eines Hypergraphen H ist ein Tripel (T, B, C), bestehend aus einem gewurzelten Baum T und Funktionen $B\colon V(T) \to 2^{V(H)}$ und $C\colon V(T) \to 2^{E(H)}$, so dass folgendes gilt:

(HZ1) Für jeden Knoten $v \in V(H)$ gilt: die Menge $\{t \in V(T) \mid V \in B(t)\}$ ist nicht-leer und zusammenhängend in T.
(„Zusammenhangseigenschaft“)

(HZ2) Für jede Kante $e \in E(H)$ gibt es einen Knoten $t \in V(T)$ mit $e \subseteq B(t)$.
(Jede Hyperkante wir von einem Baumknoten „abgedeckt“)

(HZ3) Für jeden Knoten $t \in V(T)$ gilt: $B(t) \subseteq \bigcup C(t)$.
(Die Hyperkanten „überdecken“ die Knoten)

(HZ4) Für jeden Baumknoten $r \in V(T)$ gilt: $\bigcup C(r) \cap \bigcup_{s \in T_r} B(s) \subseteq B(r)$

Hierbei bezeichnet T_r den Teilbaum von T, der aus all denjenigen Knoten s von T besteht, für die der Pfad von der Wurzel von T nach s durch r geht. Anschaulich ist T_r der Teilbaum von T mit Wurzel r.

6.17 Definition. Die *Weite* einer Hyperbauzerlegung (T, B, C) eines Hypergraphen H ist definiert als:

$$\text{weite}(T, B, C) := \max \big\{ |C(t)| \ \big| \ t \in T \big\}.$$

Die *Hyperbauweite* von H ist die Zahl

$$\text{hw}(H) = \min\{\text{weite}(T, B, C) \mid (T, B, C) \text{ ist Hyperbauzerlegung von } H\}.$$

Die *Hyperbauweite einer regelbasierten konjunktiven Anfrage* Q, in Zeichen $\text{hw}(Q)$, ist definiert als $\text{hw}(Q) := \text{hw}(H_Q)$.

6.18 Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$.

- Ist G ein Baum (aufgefasst als Hypergraph) mit mindestens einer Kante, so ist $\text{hw}(G) = 1$.
- Jeder Kreis Z_n mit $n \geqslant 3$ Knoten hat Hyperbaumweite 2:
  Seien $1, \ldots, n$ die Knoten von Z_n (in dieser Reihenfolge). Wir geben eine Hyperbaumzerlegung von Z_n der Weite 2 an: T ist ein Pfad mit Knoten $\{t_1, \ldots, t_{n-1}\}$ (in dieser Reihenfolge), und
  $$B_{t_i} := \{1, 2, i+1, i+2\}$$
  für $i < n-1$, und $B_{t_{n-1}} := \{1, 2, n\}$.
  Jeder Block lässt sich dann wie folgt von zwei Kanten überdecken:
  $$C_{t_i} := \{\{1, 2\}, \{i+1, i+2\}\}$$
- Der Hypergraph H_n mit Knotenmenge $\{1, \ldots, n\}$ und Kantenmenge $\big\{\{1, \ldots, n\}\big\}$ hat Hyperbaumweite 1.

6.19 Beispiel. Für den Hypergraphen H aus Abbildung 6.1 gilt: $\text{hw}(H) = 2$.

Für diejenigen, die mit dem Begriff *Bauweite* vertraut sind, ist es interessant sich folgendes zu überlegen: Wenn (T, B, C) eine Hyperbaumzerlegung von H ist, so ist (T, B) eine Baumzerlegung des Gaifman-Graphen von H.

6.20 Theorem. *Für alle Hypergraphen H gilt:*

$$\mathrm{hw}(H) = \text{mon-gz}(H).$$

Außerdem kann man in Polynomialzeit aus einer Gewinnstrategie der Gendarmen im monotonen Spiel $\mathrm{RG}(H, k)$ *eine Hyperbauzerlegung der Weite* $\leqslant k$ *berechnen.*

Wir beweisen den Satz hier nicht. Ein beweis findet sich in [3]. (Für den Beweis ist die etwas technische Bedingung (HZ4) wesentlich. Wenn man sie weglässt, erhält an den Begriff der *verallgemeinerten Hyperbauweite*. Er ist einfacher zu handhaben und unterscheidet sich von der Hyperbauweite nur um einen konstanten Faktor [2]. Allerdings hat er schlechtere algorithmische Eigenschaften [4].) Jetzt können wir den zentralen Satz dieses Kapitels formulieren.

6.21 Theorem. *Sei* $k \in \mathbb{N}$ *fest. Sei* $\mathbf{R}$ *ein Datenbankschema, und sei* $\mathcal{C}_k$ *eine Klasse Boolescher regelbasierter konjunktiver Anfragen mit Hyperbaumweite höchstens* k*. Dann ist das folgende Problem in Polynomialzeit lösbar.*

Eingabe:	Datenbank $\mathbf{I} \in \mathit{inst}(\mathbf{R})$, $Q \in C_k$.
Problem:	Gilt $[\![Q]\!](\mathbf{I}) \neq \varnothing$?

Beweisidee. Wir wissen bereits, dass sich Boolesche azyklische Anfragen in Polynomialzeit auswerten lassen. Das wollen wir für den Beweis benutzen.
Gegeben $\mathbf{I}$ und Q, machen wir folgende Schritte:

(1) Berechne eine Hyperbaumzerlegung (T, B, C) für H_G der Weite $\leqslant k$.

(2) Für jeden Knoten $t \in V(T)$ erweitere die Datenbank $\mathbf{I}$ um die Relation R_t^0, die aus dem Join von Relationen $R_1, \dots, R_\ell$ besteht ($\ell \leqslant k$), wobei $R_1, \dots, R_\ell$ Relationene sind, die den Hyperkanten in C_t entsprechen.

(3) Projiziere in R_t^0 auf die Spalten, die zu den Variablen aus B_t gehören. Erhalte die Relation R_t.

(4) Sei nun $\mathbf{I}'$ die Datenbank, die aus $\mathbf{I}$ entsteht, indem wir für alle Knoten $t \in V(T)$ die Relationen R_t hinzugefügt haben. Das Schema von $\mathbf{I}'$ ist dann $\mathbf{R} \cup \{R_t \mid t \in V(T)\}$.
Ergänze nun den Rumpf von Q durch die Atome $R_t\bar{x}_t$ für alle $t \in V(T)$, wobei x_t eine Aufzählung der Variablen aus $B(t)$ (in der richtigen Reihenfolge) ist, und erhalte so die Boolesche regelbasierte Anfrage Q'.

(5) Dann gilt:
(1) Q' ist azyklisch, und
(2) $[\![Q']\!](\mathbf{I}') = [\![\mathbf{Q}]\!](\mathbf{I})$.

Da Q' azyklisch ist, können wir in Polynomialzeit entscheiden, ob $[\![Q']\!](\mathbf{I}') \neq \varnothing$ ist, und wegen (5.2) können wir das Ergebnis als Antwort ausgeben.
Für die Laufzeit müssen wir uns noch davon überzeugen, dass die Schritte (1)–(4) in Polynoialzeit machbar sind. Für die Schritte (2)–(4) ist das leicht zu sehen.
Zu Schritt (1): Nach Satz 6.15 und Satz 6.20 geht er in Polynomialzeit. □

Literaturverzeichnis

[1] I. Adler. Marshals, monotone marshals, and hypertree-width. *Journal of Graph Theory*, 47:275–296, 2004.

[2] Isolde Adler, Georg Gottlob, and Martin Grohe. Hypertree width and related hypergraph invariants. *Eur. J. Comb.*, 28(8):2167–2181, 2007.

[3] G. Gottlob and N. Leone and F. Scarcello. Robbers, marshals, and guards: Game theoretic and logical characterizations of hypertree width. *Journal of Computer and System Sciences*, 66:775–808, 2003.

[4] G. Gottlob, Z. Miklos, and Th. Schwentick. Hard problems related to hypergraph decompositions. In *PODS'06*, 2006. Im Druck.

[5] P.D. Seymour and R. Thomas. Graph searching and a min-max theorem for tree-width. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 58:22–33, 1993.