Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

21. Februar 2013

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 14

Abgabe: ***keine Abgabe!*** *Übungsblatt zur Besprechung im Help-Desk am 21. Februar 2013*

Aufgabe 1: Aussagenlogik (0 Punkte)

(a) Von Menschen, die auf den Mond geflogen sind, kann man getrost sagen, sie seien berühmt. Lady Gaga ist unseres Wissens nicht auf den Mond geflogen und dennoch gibt es Menschen, die behaupten, sie sei berühmt. Untersuchen Sie im Folgenden, ob hier ein logischer Widerspruch vorliegt.

Stellen Sie dazu eine aussagenlogische Formel φ auf, die aussagt: Falls Lady Gaga zum Mond geflogen ist, ist sie berühmt und außerdem soll gleichzeitig gelten, dass sie nicht zum Mond geflogen ist und dass sie berühmt ist. Benutzen Sie dazu die atomaren Aussagen M (Lady Gaga ist zum Mond geflogen) und B (Lady Gaga ist berühmt). Untersuchen Sie nun, ob φ einen logischen Widerspruch ausdrückt oder ob Situationen existieren, in denen die Formel eine wahre Aussage repräsentiert.

(b) Es ist ein bisher gut gehütetes Geheimnis, dass Lummerland Teil der Euro-Zone ist. Aber ähnlich wie bei anderen Ländern auch haben die Turbulenzen an den Finanzmärkten den Staatshaushalt Lummerlands in arge Bedrängnis gebracht. Die Situation ist so ernst, dass Staatsoberhaupt König Alfons der Viertel-vor-Zwölfte die Europäische Zentralbank EZB um einen Kredit bitten muss. Doch die EZB ist streng und vergibt den Kredit nur, wenn die folgenden Anforderungen erfüllt sind:

I: Wenn die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden, müssen die Banken stärker kontrolliert werden.

II: Wenn Staatseigentum verkauft wird oder die Steuern gesenkt werden, dann dürfen die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden.

III: Die Banken werden genau dann stärker kontrolliert, wenn die Ausgaben für Bildung erhöht werden und die Steuern nicht gesenkt werden.

(i) Geben Sie für jede der Anforderungen I, II und III eine aussagenlogische Formel an, die die jeweilige Anforderung widerspiegelt. Benutzen Sie dafür die atomaren Aussagen S (die Steuern werden gesenkt), B (die Ausgaben für Bildung werden erhöht), V (Staatseigentum wird verkauft) und K (die Banken werden stärker kontrolliert).

(ii) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel φ auf, die die atomaren Aussagen S, B, V und K benutzt und die widerspiegelt, dass alle Anforderungen gleichzeitig erfüllt sein müssen.

(iii) Geben Sie für Ihre Formel φ aus (ii) eine Belegung an, die besagt, dass die Steuern gesenkt werden, die Ausgaben für Bildung sich nicht erhöhen, Staatseigentum verkauft wird und die Banken stärker kontrolliert werden. Erfüllt diese Belegung die Formel φ?

(iv) Welche Maßnahmen genau muss König Alfons der Viertel-vor-Zwölfte aus den Möglichkeiten Steuersenkung, Bildungsausgabenerhöhung, Verkauf des Staatseigentums und Verstärkung der Bankenkontrolle treffen und welche muss er unterlassen, um allen Anforderungen der EZB gerecht zu werden? Überlegen Sie sich dazu anhand einer Wahrheitstafel, welche Belegungen die Formel φ aus (ii) erfüllen.

(c) Welche der folgenden Formeln sind in Negationsnormalform (NNF), disjunktiver Normalform (DNF) und/oder konjunktiver Normalform (KNF)?

(i) $\varphi := \Big(\big(\neg X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_3)\big) \vee \neg X_2\Big)$

(ii) $\psi := \Big((X_1 \vee \neg X_2) \wedge \big((\neg X_1 \vee X_3) \vee X_4\big)\Big)$

(iii) $\chi := X_1$

(d) Es sei $\varphi := (\neg(V_1 \leftrightarrow V_2) \wedge (\neg V_3 \vee V_1))$ und $\psi := \big((X_2 \to X_1) \vee (X_2 \wedge \neg X_3)\big)$

(i) Wandeln Sie φ in eine äquivalente aussagenlogische Formel φ' in DNF um.

(ii) Wandeln Sie ψ in eine äquivalente aussagenlogische Formel ψ' in NNF um.

(iii) Wandeln Sie ψ in eine äquivalente aussagenlogische Formel ψ'' in KNF um.

(e) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

(i) Genau dann wenn eine aussagenlogische Formel φ unerfüllbar ist, dann ist $\neg\varphi$ allgemeingültig.

(ii) Es gibt eine aussagenlogische Formel φ, so dass für alle zu φ passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 1$.

(iii) Falls eine aussagenlogische Formel φ erfüllbar und eine aussagenlogische Formel ψ unerfüllbar ist, dann ist $(\varphi \vee \psi)$ unerfüllbar.

(iv) Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn gilt $\mathbf{1} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

(v) Zu jeder aussenlogischen Formel φ existiert eine aussagenlogische Formel ψ, so dass φ allgemeingültig ist, genau dann wenn $(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi))$ allgemeingültig ist.

(f) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie außerdem folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

(i) $\varphi_1 = \big((X_1 \vee (X_2 \vee X_3)) \to (\neg X_1 \wedge (\neg X_2 \wedge \neg X_3))\big)$

(ii) $\varphi_2 = \big((X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3)) \to (\neg X_1 \vee (\neg X_2 \vee \neg X_3))\big)$

(iii) $\varphi_3 := \Big(\big((X_1 \vee X_2) \leftrightarrow X_3\big) \wedge (X_1 \wedge \neg X_3) \Big)$

(iv) $\varphi_4 := \Big(\Big(X_1 \wedge \big(X_1 \to (X_2 \vee X_3)\big)\Big) \to X_3 \Big)$

Aufgabe 2: Graphen (0 Punkte)

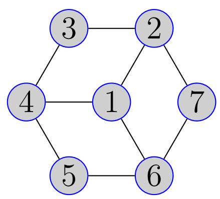
(a) Geben Sie die folgenden Graphen G_1 und G_2 in graphischer Darstellung an.
Hinweis: Beachten Sie dabei, ob es sich jeweils um einen gerichteten oder einen ungerichteten Graphen handelt.

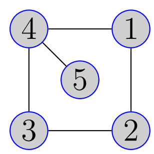
(i) $G_1 = \big(\{1,2,3,4,5,6\},\, \{(x,y) \,:\, x,y \in \{1,2,3,4,5,6\},\, x = y+2\}\big)$

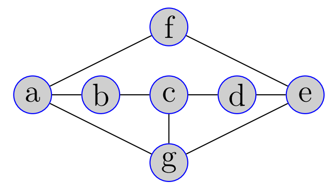
(ii) $G_2 = \big(\{x \in \mathbb{N}_{>0} \,:\, 1 \leq x \leq 6\},\, \{\{x,y\} \,:\, x,y \in \mathbb{N}_{>0},\, 1 \leq x,y \leq 6,\, x+y > 6\}\big)$

Sind die Graphen G_1 und G_2 zusammenhängend bzw. stark zusammenhängend? Sind sie azyklisch?

(b) Seien G_3, G_4 und G_5 die folgenden Graphen:

G_3:


G_4:


G_5:


(i) Geben Sie jeweils die Knoten- und Kantenmenge von G_3 und G_4 an.

(ii) Repräsentieren Sie den Graphen G_3 durch eine Adjazenzliste und G_4 durch eine Adjazenzmatrix.

(iii) Gelten die folgenden Aussagen?

(I.) G_3 ist bipartit. Geben Sie ggf. die Partitionierung der Knoten an.

(II.) $G_3 \cong G_4$. Geben Sie ggf. einen Isomorphismus an.

(III.) $G_3 \cong G_5$. Geben Sie ggf. einen Isomorphismus an.

(IV.) G_4 ist ein Teilgraph von G_3

(V.) G_4 ist ein induzierter Teilgraph von G_3.

(VI.) G_4 ist ein induzierter Teilgraph von G_5.

(VII.) G_3 besitzt einen Euler-Kreis.

(VIII.) G_4 besitzt einen Euler-Weg.

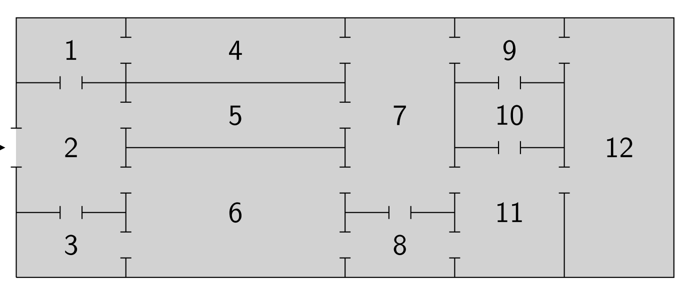
(iv) Geben Sie in G_3 einen nicht einfachen Weg an, der kein Kreis ist.

(v) Geben Sie in G_5 einen einfachen Kreis maximaler Länge an.

(vi) Geben Sie in G_3 einen einfachen Weg der Länge 6 an.

(vii) Wie groß ist Grad(G_4)?

(c) Ein Reiseleiter plant eine Tour durch ein Museum mit dem abgebildeten Grundriss.

Eingang ⟶


(i) Modellieren Sie den Grundriss des Museums als einen ungerichteten Graphen G. Geben Sie G in graphischer Darstellung so an, dass sich seine Kanten nicht kreuzen.

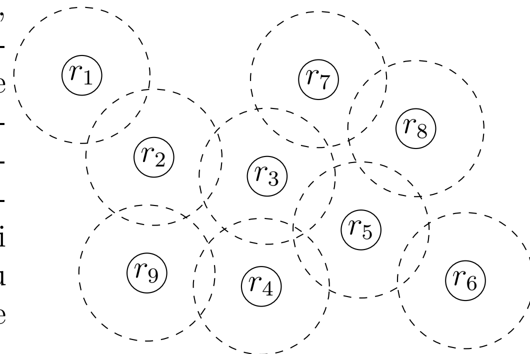
(ii) Gibt es eine Rundtour durch das Museum, die jeden Raum genau einmal besucht?

(iii) Gibt es eine Tour durch das Museum, die in Raum 2 startet und endet und jede Tür (außer der Eingangstür) genau einmal passiert?

(iv) Was ist die minimale Anzahl von Türen, die geschlossen werden müssen, damit eine Tour existiert, die in Raum 2 startet und endet und jede der nicht geschlossenen Türen (außer der Eingangstür) genau einmal passiert?

(d) Es seien die Radiostationen $r_1, \ldots, r_9$ gegeben, denen jeweils eine Sendefrequenz zugeordnet werden soll.

Radiostationen, die zu dicht beieinander liegen, dürfen allerdings nicht die gleiche Frequenz erhalten. Das nebenstehende Diagramm stellt die Lage der einzelnen Radiostationen dar. Um jede Station ist ein gestrichelter Kreis eingezeichnet, der die Reichweite einer Radiostation repräsentiert. Schneiden sich die Kreise von zwei Radiostationen r_i und r_j, so liegen r_i und r_j zu dicht beieinander und dürfen nicht die gleiche Frequenz zugeordnet bekommen.



(i) Geben Sie den Konfliktgraphen an, der als Knotenmenge die Radiostationen besitzt und bei dem eine Kante zwischen zwei Radiostationen r_i und r_j anzeigt, dass r_i und r_j nicht die gleiche Frequenz benutzen dürfen.

(ii) Sei $G = (V, E)$ der Konfliktgraph aus Aufgabenteil (i). Geben Sie eine konfliktfreie Knotenmarkierung $m : V \to \mathbb{N}$ für G an, die möglichst wenige verschiedene Markierungen benutzt, d.h., $|\text{Bild}(m)|$ soll minimal sein.

(iii) Weisen Sie jeder der Radiostationen $r_1, \ldots, r_9$ genau eine Frequenz zu, so dass Radiostationen, die zueinander in Konflikt stehen, nicht die gleiche Frequenz erhalten und möglichst wenige verschiedene Frequenzen benötigt werden.

(iv) Wie viele verschiedene Frequenzen werden für die Radiostationen $r_1, \ldots, r_9$ mindestens benötigt, d.h. wie groß ist die chromatische Zahl des Konfliktgraphen?

(e) Betrachten Sie die Relation $R := \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, d), (d, a), (d, b), (e, e)\}$ über der Menge $A := \{a, b, c, d, e\}$. Ist es möglich, durch Hinzufügen von Paaren $(x, y) \in A \times A$ die Relation R so zu erweitern, dass für die Erweiterungen R_r, R_s, R_a, R_k, R_t und R_p gilt:

(i) R_r ist reflexiv,

(ii) R_s ist symmetrisch,

(iii) R_a ist antisymmetrisch,

(iv) R_k ist konnex,

(v) R_t ist transitiv,

(vi) R_p ist eine Präordnung,

Geben Sie jeweils, falls existent, eine möglichst kleine Erweiterung von R an.

(f) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

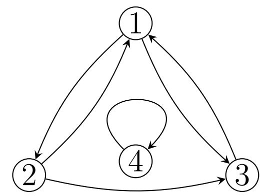
(i) Jeder gerichtete Graph, der einen Hamilton-Kreis besitzt, besitzt auch einen Euler-Kreis.

(ii) Jeder ungerichtete Graph, der 4-färbbar ist, ist auch 3-färbbar.

(iii) Jeder Binärbaum besitzt exakt $|V| - 1$ Kanten.

Aufgabe 3: Page-Rank (25 Punkte)

(a) Betrachten Sie den Web-Graph $G = (V, E)$, der aus den vier Webseiten 1, 2, 3 und 4 besteht, die wie in der nebenstehenden Abbildung miteinander verlinkt sind. Benutzen Sie für die folgenden Aufgaben den Dämpfungsfaktor $d := \frac{1}{2}$.



(i) Stellen Sie für den angegebenen Web-Graph G und den Dämpfungsfaktor d die Page-Rank-Matrix $P(G, d)$ auf.

(ii) Stellen Sie das Gleichungssystem für die Berechnung der Page-Ranks auf.

(b) Wir nehmen an, das morgige Wetter ließe sich allein aus der Kenntnis des heutigen Wetters vorhersagen. Unter dieser Annahme kann der Wetterverlauf als Markov-Kette modelliert werden. Der Einfachheit halber unterscheiden wir im Folgenden nur die beiden Wetterbedingungen *Regen* und *Sonnenschein*. Das Wetter formt dann eine Markov-Kette mit der Zustandsmenge $Z = \{z_1, z_2\}$, wobei z_1 den Regen und z_2 den Sonnenschein bezeichnet, und der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{z_1,z_1} & p_{z_1,z_2} \\ p_{z_2,z_1} & p_{z_2,z_2} \end{pmatrix}.$$

Dabei gibt der Wert p_{z_i,z_j} die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass auf Wetter im Zustand z_i am folgenden Tag Wetter im Zustand z_j folgt.

Ist die Verteilung des Wetters $X^{(k)} = (X^{(k)}_{z_1}, X^{(k)}_{z_2})$ für einen Tag $k \in \mathbb{N}$ bekannt, so kann die Verteilung des Wetters am Tag $k+1$ berechnet werden als $X^{(k+1)} = X^{(k)} \cdot P$. Für das Frankfurter Wetter wird oft behauptet, die beste Art der Wettervorhersage bestehe einfach darin, das morgige Wetter als identisch mit dem heutigen zu prognostizieren. Wenn diese Vorhersagemethode mit einer Wahrscheinlichkeit von 3/4 richtig liegt (unabhängig davon, ob aktuell Regen oder Sonnenschein herrscht), dann ergibt sich für die Markov-Kette des Frankfurter Wetters die Übergangsmatrix

$$P_F = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass die Markov-Kette für das Frankfurter Wetter an einem regnerischen Tag beginnt, d. h. es gilt $X^{(0)}_F = (1, 0)$. Berechnen Sie die Verteilung des Frankfurter Wetters an Tag drei, d. h. berechnen Sie $X^{(3)}_F$.

Aufgabe 4: Logik erster Stufe (0 Punkte)

(a) Sei $\sigma := \{\dot{F}, \dot{I}, \dot{M}, \dot{B}, \dot{Lzs}\}$ eine Signatur, wobei $\dot{F}$ ein 2-stelliges Relationssymbol, $\dot{I}, \dot{M}, \dot{B}$ jeweils 1-stellige Relationssymbole und $\dot{Lzs}$ ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur mit $\mathfrak{A} := (A, \dot{F}^{\mathfrak{A}}, \dot{I}^{\mathfrak{A}}, \dot{M}^{\mathfrak{A}}, \dot{B}^{\mathfrak{A}}, \dot{Lzs}^{\mathfrak{A}})$, in der A die Menge der Studierenden ist und $\dot{Lzs}^{\mathfrak{A}}$ den Langzeitstudenten aus A bezeichnet, also die Person aus A, die schon am längsten studiert. Außerdem gilt für alle x und y aus A:

- $(x, y) \in \dot{F}^{\mathfrak{A}} \iff x$ und y sind miteinander befreundet
- $x \in \dot{I}^{\mathfrak{A}} \iff x$ studiert Informatik

- $x \in \dot{M}^{\mathfrak{A}} \quad \Longleftrightarrow \quad x$ studiert Mathematik
- $x \in \dot{B}^{\mathfrak{A}} \quad \Longleftrightarrow \quad x$ studiert Bioinformatik

Beachten Sie, dass $\dot{F}^{\mathfrak{A}}$ eine symmetrische Relation darstellt und niemand mit sich selbst befreundet ist. Die FO[σ]-Formel $\exists x(\dot{I}(x) \wedge \dot{M}(x))$ sagt beispielsweise aus, dass es einen Studierenden gibt, der Informatik und Mathematik studiert.

(i) Geben Sie möglichst kurze FO[σ]-Formeln an, die in $\mathfrak{A}$ jeweils folgendes aussagen:

i. Der Langzeitstudent studiert Mathematik.

ii. Für jedes der Fächer Informatik, Mathematik und Bioinformatik gibt es jeweils einen Studierenden, der dieses Fach studiert.

iii. Jeder Studierende der Informatik ist mit dem Langzeitstudenten befreundet.

iv. Jeder Studierende der Bioinformatik ist mit einem Studierenden der Bioinformatik befreundet.

(ii) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden FO[σ]-Formeln in $\mathfrak{A}$ aussagt:

i. $\exists x \neg\Big(\big(\dot{I}(x) \vee \dot{M}(x)\big) \vee \dot{B}(x)\Big)$

ii. $\forall x \forall y \Big(\big(\dot{M}(x) \wedge \dot{B}(y)\big) \rightarrow \neg\dot{F}(x,y)\Big)$

iii. $\exists x \forall y \Big(\big(\dot{F}(x,y) \vee x \doteq y\big) \vee \exists z\, \big(\dot{F}(x,z) \wedge \dot{F}(z,y)\big)\Big)$

(b) Betrachten Sei die Datenbank $\mathfrak{A}_{\mathsf{Serien}}$ im Anhang.

(i) Geben Sie für die folgenden Anfragen jeweils eine Formel φ der Logik erster Stufe an, die die Anfrage beschreibt.

i. Geben Sie alle Folgennummern und deutsche Folgentitel aller Episoden der Simpsons aus.

ii. Geben Sie alle englischen und die dazugehörigen deutschen Episodentitel aller Episoden von "The Big Bang Theory" aus.

iii. Geben Sie alle deutschen Sendungen aus, die nicht aus dem Englischen übersetzt wurden.

iv. Geben Sie alle Episodentitel aus, die im Deutschen und im Englischen gleich sind.

(ii) Geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfragen durch die Formel φ_i beschrieben wird.

i. $\varphi_1(x) = \dot{\mathit{Übersetzung}}(x,x)$

ii. $\varphi_2(x) = \exists x_{\mathrm{F}_1} \exists x_{\mathrm{T}} \left(\dot{\mathit{Englisch}}(x, x_{\mathrm{F}_1}, x_{\mathrm{T}}) \wedge \exists x_{\mathrm{S}} \exists x_{\mathrm{F}_2} \dot{\mathit{Englisch}}(x_{\mathrm{S}}, x_{\mathrm{F}_2}, x)\right)$

iii. $\varphi_3(x) = \exists x_{\mathrm{S}} \exists x_{\mathrm{F}} \Big(\dot{\mathit{Deutsch}}(x_{\mathrm{S}}, x_{\mathrm{F}}, x) \wedge$

$$\forall y_{\mathrm{S}} \forall x_{\mathrm{F}} \left(\dot{\mathit{Deutsch}}(y_{\mathrm{S}}, y_{\mathrm{F}}, x) \rightarrow (x_{\mathrm{S}} \doteq y_{\mathrm{S}} \wedge x_{\mathrm{F}} \doteq y_{\mathrm{F}})\right)\Big)$$

(iii) Welche der folgenden Anfragen lassen sich als FO[σ_{Serien}]-Formel beschreiben, welche nicht?

i. Geben Sie alle $w \in ASCII^*$ bis auf "How I Met Your Mother" aus.

ii. Geben Sie alle "Prison Break" Folgen aus, deren Folgennummer größer als 50 sind.

iii. Geben Sie alle Serien aus, die exakt 26 Episoden haben, die in der Datenbank eingetragen sind.

(c) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(i) $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$

(ii) $\forall x\varphi \models \exists x\varphi$

(iii) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$

(iv) $(\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \models \exists x(\varphi \wedge \psi)$

(v) $(\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)$

(vi) $(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi) \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$

(vii) $\exists x\varphi \models \forall x\varphi$

(viii) $\forall x\varphi \models \exists x\varphi$

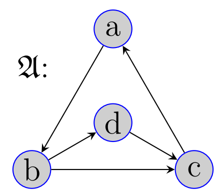
(ix) $\forall x(\varphi \vee \psi) \models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$

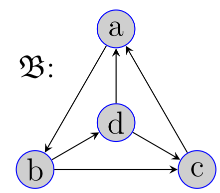
(x) $(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \models \forall x(\varphi \vee \psi)$

(xi) $(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \equiv \forall x(\varphi \vee \psi)$

(d) Sei $\sigma_{Graph} := \{\dot{E}\}$ die Signatur aus Beispiel 6.8 mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$ zur Modellierung von gerichteten Graphen.

(i) Betrachten Sie die beiden σ_{Graph}-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{B}})$, die durch die beiden Graphen in der nebenstehenden Abbildung repräsentiert werden. Geben Sie einen FO[σ_{Graph}]-Satz φ an, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ gilt.



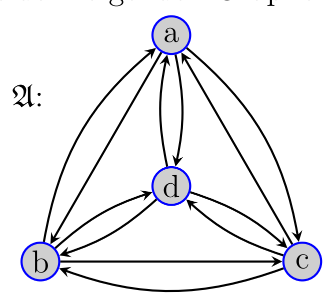


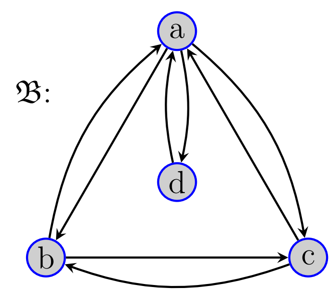
(ii) Geben Sie für die FO[σ_{Graph}]-Formel

$$\varphi(x) := \forall y \forall z\Big(\big(\neg y \dot{=} z \wedge \dot{E}(y,z)\big) \to \big(\dot{E}(y,x) \wedge \dot{E}(x,z)\big) \Big)$$

eine σ_{Graph}-Struktur $\mathfrak{A}$ und zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathfrak{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathfrak{A}, \beta_2)$ an, so dass $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \models \neg\varphi$ gilt.

(iii) Betrachten Sie die beiden σ_{Graph}-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{B}})$, die durch die beiden folgenden Graphen repräsentiert werden.





Geben Sie einen FO[σ_{Graph}]-Satz φ an, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ gilt.

(iv) Geben Sie für die σ_{Graph}-Formel

$$\varphi(x) := \forall y \exists z\Big((\dot{E}(y,x) \to \dot{E}(x,z)) \vee x \dot{=} y\Big)$$

eine Struktur $\mathfrak{A}$ und zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathfrak{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathfrak{A}, \beta_2)$ an, so dass $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \models \neg\varphi$ gilt.

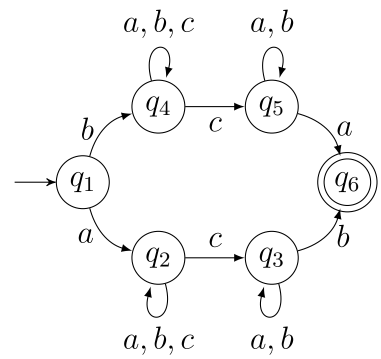
(v) Für welche der folgenden Grapheigenschaften gibt es einen FO[σ_{Graph}]-Satz φ, so dass für alle σ_{Graph}-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \text{ hat die Grapheigenschaft}$$

i. Der Graph $\mathfrak{A}$ besitzt einen Hamilton-Kreis der Länge 4.
ii. Der Graph $\mathfrak{A}$ besitzt einen Hamilton-Kreis.
iii. Der Graph $\mathfrak{A}$ besitzt einen Euler-Weg.

Aufgabe 5: Automaten **(0 Punkte)**

Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.



(a) Welche der folgenden Wörter werden von A akzeptiert, welche nicht?

(i) $aabccbaa$ **(iii)** $acbacb$ **(v)** $abbcbcb$

(ii) $aabbcc$ **(iv)** $bcaaca$ **(vi)** $baaaccb$

(b) Geben Sie die zwei kürzesten Wörter an, die A akzeptiert.

(c) Geben Sie eine (mathematische oder umgangssprachliche) Beschreibung der Sprache $L(A)$ an, die vom Automaten A akzeptiert wird.

(d) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $L(R) = L(A)$.

(e) Geben sie einen DFA A' in graphischer Darstellung an, mit $L(A') = L(A)$. Wandeln Sie dazu den NFA A mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion in einen DFA A' um. Berücksichtigen Sie dabei nur solche Zustände von A', die vom Startzustand $q'_0 := \{q_0\}$ aus erreicht werden können.

(f) Welche der folgenden Sprachen sind regulär, welche nicht? Beweisen Sie die Korrektheit.

(i) $L_1 = \{a^i a^i : i \in \mathbb{N}\}$ **(ii)** $L_2 = \{a^i b a^i : i \in \mathbb{N}\}$ **(iii)** $L_3 = \{a^i a a^i : i \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 6: Rekursiv definierte Mengen und Induktion **(0 Punkte)**

Im Folgenden wird die Sprache AT der *arithmetischen Terme mit den Variablen a, b und c* über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, c, +, -, \cdot, (,)\}$ rekursiv definiert:

Basisregel:

(B) $a,\ b,\ c \in AT$.

Rekursive Regeln:

(R1) Ist w in AT, so ist auch $-w$ in AT.

(R2) Sind w_1 und w_2 in AT, so sind auch $(w_1 + w_2)$ und $(w_1 \cdot w_2)$ in AT.

(a) Welche der folgenden Wörter gehören zur Sprache AT, welche nicht?

(i) $-a$ **(iii)** $(b + - - - - a)$ **(v)** $(b \cdot (b + -a))$

(ii) $(a - (b \cdot a))$ **(iv)** $(a + b + c)$ **(vi)** $(b \cdot (b - +a))$

(b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = AT$.

(c) Geben Sie ein Ableitungsbaum für das Wort $-(-c \cdot (a + b))$ entsprechend Ihrer Grammatik an.

(d) Für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichne $v(w)$ die Anzahl der Vorkommen der Symbole a, b und c in w und $o(w)$ die Anzahl der Vorkommen der Symbole $-$, $+$ und $\cdot$ in w. Beweisen Sie durch vollst. Induktion, dass für alle Wörter $w \in AT$ gilt: $v(w) \leq o(w) + 1$.