

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

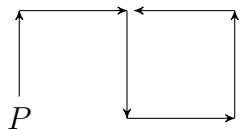
Übungsblatt 13

Abgabe: bis Donnerstag, 14. Februar 2013, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11-15)

Aufgabe 1:

(30 Punkte)

Der wahnsinnige Wissenschaftler Dr. Fo hat sein neuestes Geheimversteck auf einer unbewohnten Vulkaninsel in der einsamen Weite eines abgelegenen Teils des pazifischen Ozeans errichtet. Dort schmiedet er Rachepläne gegen seine ehemaligen Kollegen (die ihn ausgelacht haben), gegen Geheimagenten (die seine vorigen Geheimverstecke zerstört haben) und ganz besonders gegen seine früheren Studenten (die seine Übungsblätter nicht zu schätzen wussten).



Um sich vor ungebetenen Gästen zu schützen hat er den Flugroboter D.I.S.M.O.D.¹ gebaut, der entlang vorgegebener Routen hoch über dem Meer herumfliegt und Eindringlinge sucht. Eine Route besteht dabei aus einem Wort x über dem Alphabet $\Sigma = \{n, s, w, o\}$. Für jedes Zeichen in x (gelesen von links nach rechts) fliegt der Roboter dabei 100 Meter in eine bestimmte Richtung: Bei n nach Norden, bei s nach Süden, bei w nach Westen und bei o nach Osten. Zum Beispiel entspricht das Wort *nosonw* der im Bild links angegebenen Route (wobei P der Startpunkt ist).

(a) Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit $N = \{S, A, W, O\}$, und

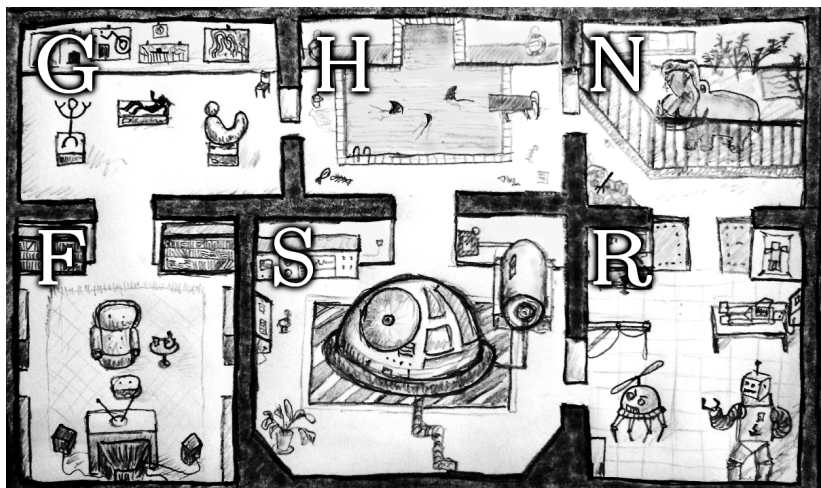
$$P = \{S \rightarrow nAs, A \rightarrow \epsilon, A \rightarrow wO, A \rightarrow oW, W \rightarrow wA, W \rightarrow oWW, O \rightarrow oA, O \rightarrow wOO\}$$

(i) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es in $L(G)$ liegt. Wenn ja, geben Sie einen Ableitungsbaum für dieses Wort an; ansonsten begründen Sie, warum dieses Wort nicht zur Sprache gehört.

$$w_1 = nAs \quad w_2 = nowos \quad w_3 = nwws \quad w_4 = nwwowoos$$

(ii) Beschreiben Sie, welche Sprache $L(G)$ von G erzeugt wird. Was für ein Flugverhalten zeigt D.I.S.M.O.D., wenn er ein Wort aus $L(G)$ als Route erhält?

Um auch in seinem Versteck für Sicherheit zu sorgen, hat Dr. Fo den Laufroboter M.O.D.² gebaut. Dieser erhält Routen im gleichen Format wie D.I.S.M.O.D.; der einzige Unterschied ist, dass er in jedem Schritt nicht 100 Meter in die entsprechende Richtung fliegt, sondern einfach in den Nachbarraum in der entsprechenden Richtung läuft. Die aufgeführten Räume im angegebenen Lageplan des Verstecks sind Galerie (G), Hai-fischbecken (H), Nilpferdgehege (N), Fernsehzimmer (F), Superlaser (S) und Roboterraum (R).



¹ Durchaus Intelligenter Schwebender Meeres-Observations-Droide ² Misstrauischer Oniscidea-Droide

Angenommen, M.O.D. befindet sich in Raum S . Dann läuft er bei einem o nach R und bei n nach H . Allerdings kann er nicht mittels w nach F laufen, da sich dort kein Durchgang befindet. Auch s führt zu keinem Raum.

- (b) Dr. Fo möchte nun alle Routen beschreiben, die bei R beginnen, nur die im Lageplan aufgeführten Durchgänge verwenden, und wieder bei R enden. Mögliche Wörter wären daher $nwwsnoso$ und $wnos$, aber nicht ww oder no . Geben Sie eine kontextfreie Grammatik über Σ an, die genau die Wörter über Σ erzeugt, die eine solche Route beschreiben.

Hinweis: Nutzen Sie für jeden der Räume ein eigenes Nichtterminalsymbol. Beschreiben Sie jede mögliche Richtung, die von jeder dieser Positionen aus jeweils möglich ist, durch eine Regel der Grammatik.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

- (a) Gegeben seien die folgenden regulären Ausdrücke über dem Alphabet $A = \{a, b\}$:

$$R_1 = a(ba)^*b \quad R_2 = (a|b)(a|b)((a|b)(a|b))^*(a|bb|\varepsilon) \quad R_3 = (ab)(ab)^*(a|b)^*$$

- (i) Gehören die folgenden Worte zur Sprache $L(R_1)$, $L(R_2)$ bzw. $L(R_3)$?

$$w_1 = bb \quad w_2 = abab \quad w_3 = abb \quad w_4 = aba$$

- (ii) Geben Sie das kürzeste Wort w an, so dass $w \in L(R_3)$ und $w \notin L(R_2)$.

- (iii) Geben Sie einen NFA mit möglichst wenigen Zuständen in graphischer Darstellung an, der die Sprache $L(R_3)$ akzeptiert.

- (b) Geben Sie für die folgenden Sprachen je einen möglichst kurzen regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

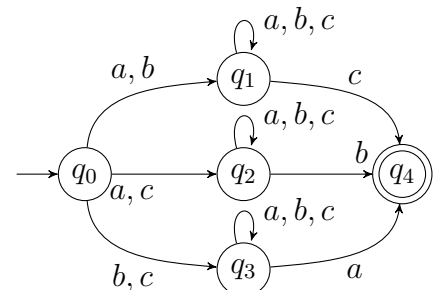
- (i) $L_1 := \{w \in \{a, b, c\}^* : \text{der erste und der letzte Buchstabe von } w \text{ sind verschieden}\}$

- (ii) $L_2 := \left\{ w \in \{a, b, c\}^* : w \neq \varepsilon \text{ und } w \text{ enthält beliebig viele Vorkommen der Buchstaben } a, b, c, \text{ diese aber in alphabetischer Reihenfolge} \right\}$

- (iii) $L_3 := \{w \in \{a, b\}^* : \text{in } w \text{ kommen keine drei } a \text{ direkt hintereinander vor}\}$

- (c) Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Geben Sie einen DFA A' in graphischer Darstellung an, mit $L(A') = L(A)$. Wandeln Sie dazu den NFA A mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion in einen DFA A' um. Berücksichtigen Sie dabei nur solche Zustände von A' , die vom Startzustand $q'_0 := \{q_0\}$ aus erreicht werden können.



Aufgabe 3: (25 Punkte)

Welche der folgenden Sprachen sind regulär, welche nicht? Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Antwort jeweils mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder durch die Angabe eines endlichen Automaten oder eines regulären Ausdrucks.

(a) $L_1 := \{a^{(i+i)} : i \in \mathbb{N}\}$

(c) $L_3 := \{a^{(i \cdot i)} : i \in \mathbb{N}\}$

(b) $L_2 := \{ba^i ba^i : i \in \mathbb{N}\}$

(d) $L_4 := \{a^i a^j a^i : i, j \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, c, g, t\}$. Die Sprache $HN \subseteq \Sigma^*$ (eine vereinfachte Form der Sprache aller DNA-Stränge, die eine so genannte *Haarnadelschleife* bilden) sei wie folgt definiert:

Basisregel: (B) Es gilt: $a, c, g, t \in HN$.

Rekursive Regel: (R) Ist $w \in HN$, so sind auch $awt, twa, cwg, gwc \in HN$.

So ist z.B. das Wort $tcactga$ in HN . Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = HN$ ist. Geben Sie außerdem einen Ableitungsbaum für das Wort $ctagggctag$ an.