Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

29. Januar 2013

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 12

Abgabe: *bis 5. Februar 2013, 8.¹⁵ Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Der *Konami-Code* ist eine Tastenkombination, die in verschiedenen Computerspielen versteckte Extras freischaltet. Auch wenn sich inzwischen unterschiedliche Varianten davon entwickelt haben, so ist doch die folgende klassische Form am weitesten verbreitet:

$$\boxed{\uparrow}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{\downarrow}\ \boxed{\downarrow}\ \boxed{\leftarrow}\ \boxed{\rightarrow}\ \boxed{\leftarrow}\ \boxed{\rightarrow}\ \boxed{\mathsf{B}}\ \boxed{\mathsf{A}}$$

Diese Zeichenfolge wurde zum ersten Mal im Jahr 1986 in einem Computerspiel der Firma Konami verwendet und führt seitdem nicht nur in Spielen, sondern auch auf Webseiten[1] zu mehr oder weniger nützlichen oder originellen Überraschungen. Auch in Filmen und auf T-Shirts ist sie gelegentlich anzutreffen. Sei $\Sigma = \{\,\boxed{\leftarrow}\,,\ \boxed{\uparrow}\,,\ \boxed{\downarrow}\,,\ \boxed{\rightarrow}\,,\ \boxed{\mathsf{A}}\,,\ \boxed{\mathsf{B}}\,\}$.

(a) Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten A_1 in graphischer Darstellung an, der eine Zeichenfolge über Σ genau dann akzeptiert, wenn diese den Konami-Code enthält (und zwar in der oben dargestellten klassischen Form).

(b) Nicht ganz so bekannt ist die folgende Zeichenfolge, die wir als den *DisMod-Code* bezeichen:

$$\boxed{\uparrow}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{\mathsf{B}}\ \boxed{\mathsf{A}}$$

Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten A_2 in graphischer Darstellung an, der eine Zeichenfolge über Σ genau dann akzeptiert, wenn diese den Konami-Code (wie gehabt in der klassischen Form) oder den DisMod-Code enthält. Um die volle Punktzahl zu erhalten, darf A_2 nicht mehr als elf Zustände haben.

Aufgabe 2: (30 Punkte)

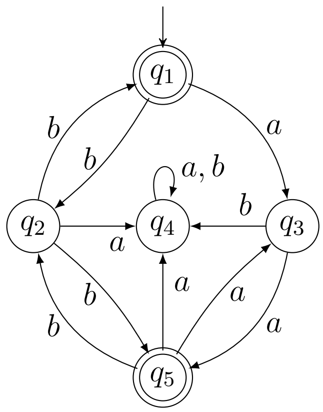
Sei A_1 der umseitig abgebildete endliche Automat über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(a) Geben Sie Folgendes für A_1 an:

(i) die Menge der Zustände, **(ii)** den Startzustand,
(iii) die Menge der Endzustände und **(iv)** die Übergangsfunktion.

(b) Ist A_1 ein deterministischer Automat? Ist A_1 ein nichtdeterministischer Automat?

[1] Beispiele finden Sie auf der Seite `http://konamicodesites.com/` oder mit der Suchmaschine Ihrer Wahl.



(c) Welche der folgenden Wörter werden von A_1 akzeptiert, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$w_1 = q_1aa \qquad w_2 = bbbbaa \qquad w_3 = abaabbbb$$
$$w_4 = aababbaa \qquad w_5 = aaaabb \qquad w_6 = bbabaa$$

(d) Geben Sie eine (mathematische oder umgangssprachliche) Beschreibung der Sprache $L(A_1)$ an, die vom Automaten A_1 akzeptiert wird.

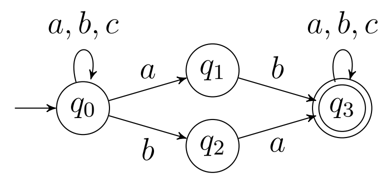
(e) Geben Sie einen DFA A_2 mit möglichst wenigen Zuständen an, der vollständig ist und für den $L(A_2) = L(A_1)$ gilt.

Aufgabe 3: (30 Punkte)

(a) Betrachten Sie das Eingabealphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$ und die Sprache

$$L := \Big\{ w \in \Sigma^* \ : \ w \text{ enthält ein Teilwort } ab \text{ oder } ba \Big\}.$$

Die Sprache L wird vom NFA A akzeptiert, der durch die nebenstehende graphische Darstellung gegeben ist.



Geben Sie einen DFA A' in graphischer Darstellung an, der die Sprache L akzeptiert. Wandeln sie dazu den NFA A mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion in den DFA A' um. Berücksichtigen Sie dabei nur solche Zustände von A', die vom Startzustand $q_0' := \{q_0\}$ aus erreicht werden können.

(b) Seien A_1 und A_2 zwei NFAs über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$, die die Sprachen $L_1 := L(A_1)$ und $L_2 := L(A_2)$ akzeptieren. Konstruieren Sie einen NFA A_3, der die Sprache $L(A_3) = L_1 \cup L_2$ akzeptiert. Begründen Sie, warum der von Ihnen konstruierte NFA tatsächlich genau die Worte akzeptiert, die zu $L_1 \cup L_2$ gehören.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Jede natürliche Zahl n lässt sich als *Dualzahl*, d.h., in der Form $[n]_2 = z_l z_{l-1} \cdots z_0$ darstellen, so dass $z_i \in \{0, 1\}$ für $0 \leq i \leq l$ mit $l \in \mathbb{N}$ ist und $n = \sum_{i=0}^{l} z_i \cdot 2^i$ gilt. Die Zahl $[n]_2$ wird als die *Dualdarstellung* der Zahl n bezeichnet. Dualzahlen können auf herkömmliche Weise schriftlich addiert werden, wobei der Übertrag bei der Zwei erfolgt.

Gegeben sei das folgende Eingabealphabet

$$\Sigma := \left\{ \begin{array}{|c|}\hline 0\\ 0\\ \hline 0\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0\\ 0\\ \hline 1\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0\\ 1\\ \hline 0\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0\\ 1\\ \hline 1\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1\\ 0\\ \hline 0\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1\\ 0\\ \hline 1\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1\\ 1\\ \hline 0\\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1\\ 1\\ \hline 1\\ \hline\end{array} \right\}.$$

Geben Sie einen DFA A an, der ein Wort w aus Σ^* genau dann akzeptiert, wenn w eine korrekte Addition zweier Dualzahlen $[n]_2$ und $[m]_2$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ darstellt. So ist beispielsweise $w \in L(A)$ für

$$w = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ \hline 1 & 1 & 0 & 0\\ \hline\end{array} \quad \text{, weil} \quad \begin{array}{rrcr} & 0101 & = & [5]_2\\ + & 0111 & = & [7]_2\\ \hline & 1100 & = & [12]_2 \end{array} \quad .$$

Hinweis: Beachten Sie, dass ein endlicher Automat jedes Eingabewort von links nach rechts liest. Begründen Sie kurz, warum der von Ihnen angegebene DFA die verlangte Sprache akzeptiert.