Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

22. Januar 2013

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 11

Abgabe: *bis 29. Januar 2013, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: **(28 Punkte)**

Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$ aus der Vorlesung.

(a) Geben Sie für die folgenden Anfragen jeweils eine Formel φ der Logik erster Stufe an, die die Anfrage beschreibt. Berechnen Sie jeweils auch die Relation $\varphi(\mathfrak{A}_{\text{Kino}})$.

- **(i)** Geben Sie alle Kinos aus, in denen um '21:45' ein Film läuft.
- **(ii)** Geben Sie die Titel aller Filme aus, die in mindestens einem Kino laufen.
- **(iii)** Geben Sie die Telefonnummern und Adressen aller Kinos aus, in denen der Film 'Capote' läuft.
- **(iv)** Geben Sie die Titel aller Filme aus, die in genau einem Kino laufen.
- **(v)** Geben Sie die Adressen aller Kinos aus, in denen kein Film vom Regisseur 'George Clooney' und kein Film mit dem Schauspieler 'Philip Seymour Hoffman' läuft.

(b) Berechnen Sie für jede der folgenden Formeln φ_i die Relation $\varphi_i(\mathfrak{A}_{\text{Kino}})$ und geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfrage durch die Formel φ_i beschrieben wird.

- **(i)** $\varphi_1(x) \ :=\ \exists x_{\text{T}} \exists x_{\text{Z}}\, \dot{Programm}(x, x_{\text{T}}, x_{\text{Z}})$
- **(ii)** $\varphi_2(x_1, x_2) \ :=\ \exists x_{\text{S}} \exists x_{\text{R}} \exists x_{\text{T}} \left(\dot{Filme}(x_2, x_1, x_{\text{S}}) \ \wedge\ \dot{Filme}(x_{\text{T}}, x_{\text{R}}, x_1) \right)$
- **(iii)** $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) \ :=\ \Big(\exists x_{\text{T}}\, \dot{Orte}(x_1, x_2, x_{\text{T}}) \ \wedge$
  $\exists x_{\text{Z}_1} \big(\dot{Programm}(x_1, x_3, x_{\text{Z}_1}) \ \wedge\ \forall x_{\text{K}} \forall x_{\text{Z}_2} (\dot{Programm}(x_{\text{K}}, x_3, x_{\text{Z}_2}) \ \rightarrow\ x_1 \doteq x_{\text{K}}) \big) \Big)$

Aufgabe 2: **(27 Punkte)**

Sei $\sigma := \{\dot{R}, \dot{f}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{R}$, einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$ und dem Konstantensymbol $\dot{c}$.

(a) Bestimmen Sie für jede der folgenden FO[σ]-Formeln, welche Variablen frei und welche Variablen gebunden in der Formel vorkommen (ohne Begründung). Entscheiden Sie außerdem für jede der FO[σ]-Formeln, ob es sich um einen FO[σ]-Satz handelt.

- **(i)** $\dot{f}(x) \doteq \dot{f}(\dot{c})$
- **(ii)** $\exists x\, \dot{R}(\dot{f}(\dot{f}(x)), x)$
- **(iii)** $\left(\exists y\, \dot{R}(y, y) \ \vee\ \forall x\, \neg \dot{R}(x, y) \right)$
- **(iv)** $\exists z \left(\dot{R}(x, z) \ \wedge\ \dot{R}(z, y) \right)$
- **(v)** $\forall x \forall y \left(\exists z\, \dot{f}(z) \doteq x \ \rightarrow\ \exists z\, \dot{f}(z) \doteq y \right)$
- **(vi)** $\left(\forall z \exists x\, \dot{R}(x, \dot{c}) \ \leftrightarrow\ \forall y\, \dot{R}(y, z) \right)$

(b) Betrachten Sie die σ-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \dot{R}^{\mathfrak{A}}, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$ mit dem Universum $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{A}} = \{(x, y) \in A^2 \colon x \leq y\}$ und $\dot{c}^{\mathfrak{A}} = 0$. Weiterhin sei $\dot{f}^{\mathfrak{A}} \colon A \to A$ für alle $x \in A$ definiert durch

$$\dot{f}^{\mathfrak{A}}(x) \;=\; \begin{cases} 2x & \text{wenn } x \leq 2, \\ 2x - 5 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta : \textsc{Var} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = 1, \quad \beta(v_1) = 3, \quad \beta(v_2) = 1, \quad \beta(v_3) = 2, \quad \beta(v_i) = 4, \text{für alle } i > 3.$$

Berechnen Sie $[\![\varphi_i]\!]^{\mathcal{I}}$ für jede der FO$[\sigma]$-Formeln φ_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ analog zu Beispiel 6.28 im Skript.

(i) $\varphi_1 \;:=\; \big(\dot{f}(v_1) \doteq v_2 \;\wedge\; \dot{f}(v_2) \doteq v_3\big)$

(ii) $\varphi_2 \;:=\; \exists v_1 \big(v_1 \doteq \dot{f}(v_4) \;\wedge\; \dot{R}(v_4, v_1)\big)$

(iii) $\varphi_3 \;:=\; \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \big((\dot{R}(v_0, v_1) \;\wedge\; \dot{R}(v_1, v_2)) \;\to\; \dot{R}(v_0, v_2)\big)$

Aufgabe 3: (21 Punkte)

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(i) $\exists x\, \varphi \;\models\; \forall x\, \varphi$

(ii) $\forall x\, \varphi \;\models\; \exists x\, \varphi$

(iii) $(\forall x\, \varphi \;\wedge\; \forall x\, \psi) \;\equiv\; \forall x\, (\varphi \;\wedge\; \psi)$

(iv) $(\forall x\, \varphi \;\vee\; \forall x\, \psi) \;\equiv\; \forall x\, (\varphi \;\vee\; \psi)$

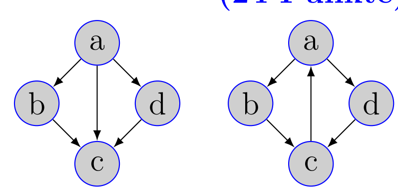
(v) $(\exists x\, \varphi \;\wedge\; \exists x\, \psi) \;\equiv\; \exists x\, (\varphi \;\wedge\; \psi)$

(vi) $(\exists x\, \varphi \;\vee\; \exists x\, \psi) \;\equiv\; \exists x\, (\varphi \;\vee\; \psi)$

(b) Beweisen Sie, dass ihre Antworten zu **(iii)** und **(v)** korrekt sind.

Aufgabe 4: (24 Punkte)

(a) Betrachten Sie die σ_{Graph}-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \dot{E}^{\mathfrak{B}})$, die durch die beiden Graphen in der nebenstehenden Abbildung repräsentiert werden. Geben Sie einen FO$[\sigma_{\text{Graph}}]$-Satz φ an, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$.



(b) Geben Sie für die Formel

$$\varphi(x) \;:=\; \forall y \big(x \doteq y \;\vee\; \neg \dot{E}(y, x) \;\vee\; \exists z\, \dot{E}(x, z)\big)$$

eine σ_{Graph}-Struktur $\mathfrak{C}$ und zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathfrak{C}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathfrak{C}, \beta_2)$ an, so dass $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \models \neg\varphi$.

(c) Entscheiden Sie, ob FO$[\sigma_{\text{Graph}}]$-Formeln φ und ψ mit freien Variablen x und y existieren, so dass für jeden gerichteten Graphen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ und jede zu φ und ψ passende Belegung β in $\mathfrak{A}$ gilt:

(i) $(\mathfrak{A}, \beta)$ erfüllt $\varphi \iff$ in $\mathfrak{A}$ existiert ein Weg von $\beta(x)$ nach $\beta(y)$

(ii) $(\mathfrak{A}, \beta)$ erfüllt $\psi \iff$ in $\mathfrak{A}$ existiert ein Weg der Länge 3 von $\beta(x)$ nach $\beta(y)$.