Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

15. Januar 2013

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 22. Januar 2013, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: **(29 Punkte)**

Im Onlinerollenspiel *Village of Voidcraft* kann sich jeder Spieler einer Plündergilde anschließen; in der Rangliste der 100 besten Spieler wird dann zu jedem Spieler auch die entsprechende Gilde mit angezeigt. Für diese Aufgabe konzentrieren wir uns auf die drei Gilden *Bonuspunktegeier*, *Diss-Mods* und *RaidenStattStudieren*.

Sei $\sigma = \{\dot{B}, \dot{D}, \dot{R}, \dot{Vorg}, \dot{erster}\}$ eine Signatur, wobei $\dot{B}, \dot{D}, \dot{R}$ 1-stellige Relationssymbole, $\dot{Vorg}$ ein 1-stelliges Funktionssymbol und $\dot{erster}$ ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ und $\dot{erster}^{\mathcal{A}} = 1$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in \dot{B}^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde Bonuspunktegeier
- $a \in \dot{D}^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde Diss-Mods
- $a \in \dot{R}^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde RaidenStattStudieren
- $\dot{Vorg}^{\mathcal{A}}(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = 1 \\ a-1, & \text{falls } a \in \{2, \ldots, 100\}. \end{cases}$

(a) Geben Sie FO[σ]-Formeln an, die in $\mathcal{A}$ Folgendes aussagen:

(i) Auf Platz 1 der Rangliste ist ein Mitglied der Bonuspunktegeier.

(ii) Falls ein Spieler von Diss-Mods auf Platz 1 der Rangliste ist, dann stehen auf allen Plätzen Spieler von Diss-Mods.

(iii) Auf der Rangliste stehen mindestens zwei Mitglieder von RaidenStattStudieren.

(iv) Unmittelbar hinter jedem Mitglied von Diss-Mods steht eines von Bonuspunktegeier oder RaidenStattStudieren.

(b) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden FO[σ]-Formeln in $\mathcal{A}$ aussagt:

(i) $\exists x \exists y \Big(\big(\dot{D}(y) \land \dot{B}(x) \big) \land \exists z \dot{R}(z) \Big)$

(ii) $\exists x \Big(\dot{B}(x) \land \neg \exists y \ x \doteq \dot{Vorg}(y) \Big)$

(iii) $\forall x \Big(\big(\dot{R}(x) \land \neg \dot{erster} \doteq x \big) \to \dot{D}\big(\dot{Vorg}(x) \big) \Big)$

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{\dot{f}, \dot{R}, \dot{S}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$, einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{R}$, einem 3-stelligen Relationssymbol $\dot{S}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$.

(a) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es sich jeweils um einen σ-Term (gemäß Definition 6.13), um eine atomare σ-Formel bzw. um eine FO$[\sigma]$-Formel (gemäß Definition 6.19) handelt. Begründen Sie gegebenenfalls, warum ein Wort kein σ-Term, keine atomare σ-Formel bzw. keine FO$[\sigma]$-Formel darstellt.

(i) $\dot{f}(\dot{f}(\dot{f}(\dot{c})))$ **(iv)** $\big(\forall v_1 \dot{f}(\dot{f}(v_1)) \wedge \dot{S}(\dot{f}(v_2), v_1, \dot{c})\big)$

(ii) $\big(\dot{f}(v_1) \wedge \dot{R}(v_1, v_2)\big)$ **(v)** $\exists v_2 \big(\dot{f}(v_2) \doteq \dot{f}(\dot{f}(v_2)) \vee \neg \dot{R}(v_2, \dot{f}(v_2))\big)$

(iii) $\dot{S}(\dot{f}(\dot{c}), v_3)$ **(vi)** $\forall v_4 \exists v_5 \forall v_6 \Big(\big(\dot{S}(\dot{f}(v_1), v_4, v_5) \wedge \dot{R}(v_1, v_6)\big) \rightarrow \dot{f}(v_3) \doteq \dot{c}\Big)$

(b) Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathfrak{A} := (A, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{R}^{\mathfrak{A}}, \dot{S}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$, $\mathfrak{B} := (B, \dot{f}^{\mathfrak{B}}, \dot{R}^{\mathfrak{B}}, \dot{S}^{\mathfrak{B}}, \dot{c}^{\mathfrak{B}})$ und $\mathfrak{C} := (C, \dot{f}^{\mathfrak{C}}, \dot{R}^{\mathfrak{C}}, \dot{S}^{\mathfrak{C}}, \dot{c}^{\mathfrak{C}})$ wobei

- $A := \{q, r, s, t, u\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{A}} := \{(q,q), (r,t), (t,r), (u,q)\}$, $\dot{S}^{\mathfrak{A}} := \{(q,s,q), (u,t,r)\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{A}} := s$,
- $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{B}} := \{(5,5), (4,1), (1,4), (2,5)\}$, $\dot{S}^{\mathfrak{B}} := \{(5,3,5), (2,1,4)\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{B}} := 3$,
- $C := \{v, w, x, y, z\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{C}} := \{(v,v), (w,y), (y,w), (z,v)\}$, $\dot{S}^{\mathfrak{C}} := \{(v,z,v), (z,y,w)\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{C}} := x$

und die Funktionen $\dot{f}^{\mathfrak{A}} \colon A \to A$, $\dot{f}^{\mathfrak{B}} \colon B \to B$ und $\dot{f}^{\mathfrak{C}} \colon C \to C$ definiert sind durch

x	q	r	s	t	u
$\dot{f}^{\mathfrak{A}}(x)$	t	s	t	u	q

x	1	2	3	4	5
$\dot{f}^{\mathfrak{B}}(x)$	2	5	1	3	1

x	v	w	x	y	z
$\dot{f}^{\mathfrak{C}}(x)$	y	x	y	z	v

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ und ob $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und begründen Sie, warum es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

Aufgabe 3: (18 Punkte)

Sei $\sigma := \{\dot{f}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$. Wir betrachten die σ-Struktur $\mathfrak{A} := (A, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$, wobei $A := \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}, \text{Echse}, \text{Spock}\}$ und $\dot{c}^{\mathfrak{A}} :=$ Spock. Der Wert $\dot{f}^{\mathfrak{A}}(x, y)$ für $x, y \in A$ findet sich in Zeile x und Spalte y der nebenstehenden Tabelle.

$\dot{f}^{\mathfrak{A}}$	Stein	Schere	Papier	Echse	Spock
Stein	Stein	Stein	Papier	Stein	Spock
Schere	Stein	Schere	Schere	Schere	Spock
Papier	Papier	Schere	Papier	Echse	Papier
Echse	Stein	Schere	Echse	Echse	Echse
Spock	Spock	Spock	Papier	Echse	Spock

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta \colon \text{VAR} \to A$, für die gilt:

$\beta(v_0) = \text{Stein}$, $\beta(v_1) = \text{Spock}$, $\beta(v_2) = \text{Schere}$, und $\beta(v_i) = \text{Papier}$ für alle $i \geq 3$.

Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_3]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden σ-Terme:

(a) $t_1 := \dot{f}(\dot{c}, v_1)$ **(b)** $t_2 := \dot{f}(\dot{f}(\dot{c}, v_0), \dot{f}(v_2, v_1))$ **(c)** $t_3 := \dot{f}(\dot{c}, \dot{f}(\dot{f}(v_6, v_7), \dot{f}(v_2, \dot{c})))$

Aufgabe 4: (28 Punkte)

Es sei der Webgraph G gegeben, der aus den vier Webseiten 1, 2, 3 und 4 besteht und der für den Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$ die folgende Page-Rank-Matrix $P := P(G, d)$ besitzt:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie den Web-Graphen G in graphischer Darstellung an.

(b) Es seien bezüglich des Dämpfungsfaktors $d = \frac{1}{2}$ die drei Page-Ranks $PR_2 = \frac{12}{35}$, $PR_3 = \frac{8}{35}$ und $PR_4 = \frac{1}{7}$ für die Webseiten 2, 3 und 4 gegeben. Berechnen Sie den Page-Rank PR_1 für die Webseite 1 bezüglich des Dämpfungsfaktors $d = \frac{1}{2}$.

(c) Nehmen Sie an, dass der Zufalls-Surfer auf einer der vier Webseiten von G startet, wobei er jede Webseite gleichwahrscheinlich als Startpunkt wählen kann. Das bedeutet, dass die Anfangsverteilung für den Zufalls-Surfer durch $X^{(0)} := (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ beschrieben wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufalls-Surfers auf den Knoten von G nach einem Schritt, d.h. berechnen Sie $X^{(1)}$.