Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

18. Dezember 2012

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 15. Januar 2013, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

(a) Auf dem Weihnachtsmarkt von Großdorf sollen insgesamt 8 Stände rund um den Marktplatz arrangiert werden. Die 8 Stände setzen sich folgendermaßen zusammen:

- Ein Stand, in dem die traditionelle Weihnachtskrippe aufgebaut ist.
- Zwei Stände, an denen Weihnachtsschmuck verkauft wird: einer bietet Holzschmuck aus dem Erzgebirge an, der andere dekorative Zombies im Weihnachtsmannkostüm.
- Zwei Glühweinstände; einer davon wird von Herrn Max, der andere von Frau Peters betrieben.
- Drei Essensstände; einer davon verkauft Crêpes, ein anderer Tofuspieße und der dritte Bratwürste vom Holzkohlegrill.

Bei der Platzierung der 8 Stände um den Marktplatz ist Folgendes zu beachten:

Der Zombiestand und der Tofustand sind vielen ältern Bewohnern von Großdorf ein wenig suspekt und dürfen daher nicht neben der Weihnachtskrippe platziert werden. Frau Peters und Herr Max betrachten jede Art von Lebensmitteln als Konkurrenz zu ihrem Angebot – die Glühweinstände dürfen daher nicht nebeneinander stehen, außerdem darf kein Glühweinstand neben einem Essensstand stehen. Der Besitzer des Holzschmuckstandes ist strenger Vegetarier und fordert deshalb, nicht neben dem Stand mit den Bratwürsten zu stehen. Dafür weigert sich die Besitzerin des Bratwurststandes, ihren Stand neben den mit den Tofuspießen zu stellen. Außerdem muss beachtet werden, dass Herr Max und die Betreiberin des Holzschmuckstandes ihre Stände nicht neben den Zombiestand stellen wollen, da sie diesen albern und unweihnachtlich finden. Schließlich will die Besitzerin des Crêpes-Stands jenen nicht neben dem Holzschmuckstand aufbauen, da sie sich daran stört, dass dessen Besitzerin sich permanent über den Verfall der Traditionen beschwert.

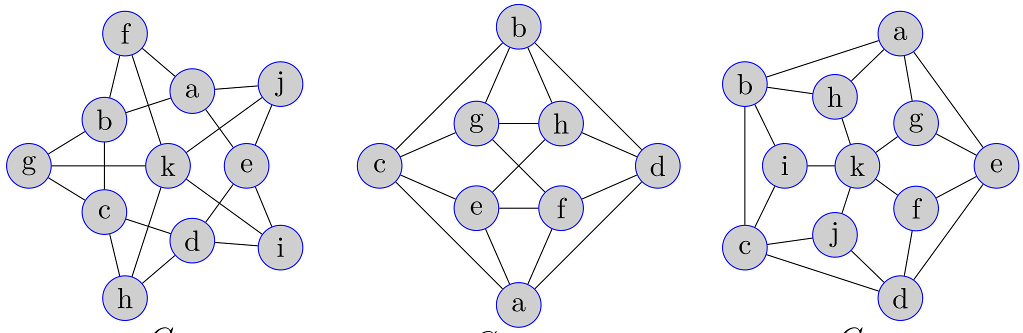
(i) Stellen Sie den Konfliktgraph auf, in dem die Stände durch Knoten repräsentiert werden und eine Kante zwischen zwei Knoten anzeigt, dass die entsprechenden Stände nicht nebeneinander platziert werden können.

(ii) Geben Sie das Komplement des Konfliktgraphen an.

(iii) Geben Sie einen Hamilton-Kreis im Komplement des Konfliktgraphen an.

(iv) Geben Sie eine Platzierung der 8 Stände rund um den Marktplatz an, mit der alle zufrieden sind.

(b) Es seien die folgenden drei ungerichteten Graphen G_1, G_2 und G_3 gegeben.



G_1 G_2 G_3

(i) Geben Sie für G_1, G_2 und G_3 jeweils einen Knoten maximalen Grades und einen Knoten minimalen Grades an.

(ii) Geben Sie für G_1, G_2 und G_3 jeweils ein Matching maximaler Größe an.

(iii) Enthalten die Graphen G_1, G_2 und G_3 jeweils einen Euler-Kreis?

(iv) Enthalten die Graphen G_1, G_2 und G_3 jeweils einen Hamilton-Kreis?

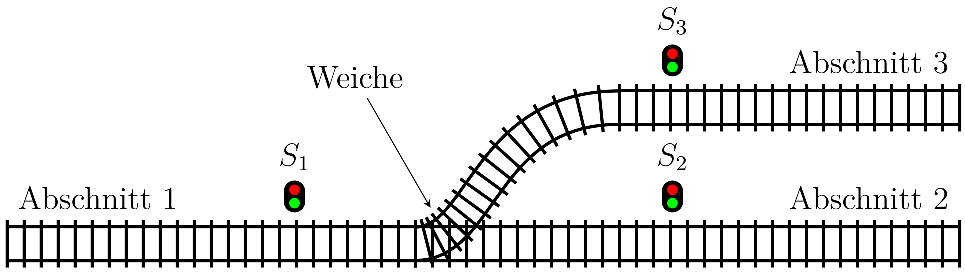
(v) Geben Sie für G_1, G_2 und G_3 jeweils eine konfliktfreie Knotenfärbung mit möglichst wenigen Farben an. (Sie brauchen nicht zu begründen, warum die von Ihnen verwendete Anzahl von Farben jeweils minimal ist.)

(vi) Gilt $G_1 \cong G_3$, gilt $G_2 \cong G_3$?

(vii) Welche der Graphen G_1, G_2 und G_3 sind planar?

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

(a) Es sei die folgende Weiche einer Bahnanlage gegeben:



Die drei Signale S_1, S_2 und S_3 geben an, ob ein Zug vom entsprechenden Gleisabschnitt über die Weiche fahren darf: Leuchtet S_i grün, dann darf ein Zug vom Gleisabschnitt i aus über die Weiche fahren.

Die Weiche ist entweder auf „geradeaus fahren" oder „abbiegen" eingestellt. Wenn sie auf „geradeaus fahren" eingestellt ist, dann fahren Züge, die vom Gleisabschnitt 1 aus über die Weiche fahren, auf den Gleisabschnitt 2 und umgekehrt. Ansonsten fahren Züge, die vom Gleisabschnitt 1 aus über die Weiche fahren, auf den Gleisabschnitt 3 und umgekehrt.

Mit Hilfe der folgenden atomaren Aussagen lassen sich nun einfache Anforderungen an die Weichenanlage formulieren:

- X_1: S_1 leuchtet grün.
- X_2: S_2 leuchtet grün.
- X_3: S_3 leuchtet grün.
- X_{W}: Die Weiche ist auf „geradeaus fahren" eingestellt.

Beispielsweise besagt die aussagenlogische Formel $\big(\neg X_\mathrm{W} \wedge (X_1 \wedge \neg X_3)\big)$, dass die Weiche auf „abbiegen“ eingestellt ist, S_1 grün leuchtet und S_3 rot leuchtet.

Geben Sie aussagenlogische Formeln an, die nur die Variablen X_1, X_2, X_3 und X_W benutzen und Folgendes aussagen:

(i) Wenn S_2 grün leuchtet, dann ist die Weiche auf „geradeaus fahren“ eingestellt, und wenn S_3 grün leuchtet, dann ist die Weiche auf „abbiegen“ eingestellt.

(ii) Höchstens eines der drei Signale S_1, S_2, S_3 leuchtet grün. D.h. wenn S_1 grün leuchtet, dann leuchten S_2 und S_3 nicht grün und analog für die anderen Signale. Beachten Sie, dass auch der Fall eintreten kann, bei dem keines der drei Signale grün leuchtet.

(b) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie außerdem Folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

(i) $\varphi \;=\; \big((\neg X_2 \to X_1) \vee \neg X_2\big)$

(ii) $\psi \;=\; \Big(\, (X_1 \to X_2) \leftrightarrow \big((X_1 \wedge \neg X_3) \;\to\; (X_2 \vee X_4)\big)\,\Big)$

(c) Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch?

(i) Eine aussagenlogische Formel φ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.

(ii) Eine aussagenlogische Formel φ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.

(iii) Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn gilt, dass $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$.

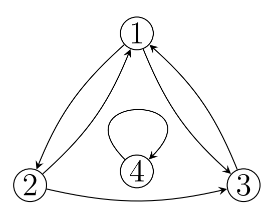
(d) Geben Sie eine zur Formel

$$\varphi \;:=\; \big(\neg(X_1 \wedge \neg X_2) \wedge \neg(X_3 \wedge \neg X_4)\big)$$

äquivalente aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform an.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Betrachten Sie den Web-Graph $G = (V, E)$, der aus den vier Webseiten 1, 2, 3 und 4 besteht, die wie in der nebenstehenden Abbildung miteinander verlinkt sind. Benutzen Sie für die folgenden Aufgaben den Dämpfungsfaktor $d := \frac{3}{4}$.



(a) Berechnen Sie ähnlich wie in Beispiel 5.2 aus dem Skript die Page-Ranks PR_1, PR_2, PR_3 und PR_4 der vier Webseiten von G bezüglich des Dämpfungsfaktors d.

(b) Stellen Sie für den angegebenen Web-Graph G und den Dämpfungsfaktor d die Page-Rank-Matrix $P(G, d)$ auf.

(c) Sei P die Page-Rank-Matrix $P(G, d)$ aus Teilaufgabe (b). Wir nehmen an, der Zufalls-Surfer startet auf einer der vier Webseiten von G, wobei er jede Webseite gleichwahrscheinlich als Startpunkt wählen kann. Das bedeutet, dass die Anfangsverteilung für den Zufalls-Surfer durch $X^{(0)} := (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ beschrieben wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufalls-Surfers auf den Knoten von G nach einem Schritt (d.h. $X^{(1)}$), nach zwei Schritten (d.h. $X^{(2)}$) und nach drei Schritten (d.h. $X^{(3)}$). Dabei ist $X^{(1)} := X^{(0)} \cdot P$, $X^{(2)} := X^{(1)} \cdot P$ und $X^{(3)} := X^{(2)} \cdot P$.

(d) Gesucht ist ein Web-Graph $G' = (V', E')$ mit vier Webseiten, in dem jede Webseite auf mindestens eine Webseite verlinkt, die nicht sie selber ist. Zusätzlich soll der Zufalls-Surfer mit der Anfangsverteilung $X^{(0)} := (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ nach einem Schritt in G' genau dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung erreichen, es soll also $X^{(0)} \cdot P(G', d) = X^{(0)}$ gelten. Geben Sie einen solchen Graphen G' an und weisen Sie nach, dass $X^{(0)} \cdot P(G', d) = X^{(0)}$ gilt.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Es ist eine allgemein bekannte Tatsache, dass der Weihnachtsmann nicht jedem Kind genau das bringt, was es sich wünscht. Wir haben durch investigative Recherchen erfahren, dass die Wahrscheinlichkeit für die Weihnachtswunscherfüllung eines Kindes allein davon abhängig ist, ob der Wunsch des Kindes im Jahr zuvor erfüllt wurde. Darum lässt sich die Folge der Ereignisse Wunscherfüllung/Nicht-Wunscherfüllung für ein Kind über die Jahre hinweg als Markov-Kette modellieren. Diese Markov-Kette hat als Zustandsmenge die Zustände z_1 für *Weihnachtswunsch erfüllt* und z_2 für *Weihnachtswunsch nicht erfüllt* sowie die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{z_1,z_1} & p_{z_1,z_2} \\ p_{z_2,z_1} & p_{z_2,z_2} \end{pmatrix}.$$

Dabei gibt der Wert p_{z_i,z_j} die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nach dem Eintreten von Ereignis z_i an Weihnachten im darauf folgenden Jahr das Ereignis z_j eintritt.

Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $X^{(k)} = (X^{(k)}_{z_1}, X^{(k)}_{z_2})$ der Wunscherfüllung für ein Jahr $k \in \mathbb{N}$ bekannt, so kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wunscherfüllung im Jahr $k+1$ berechnet werden als $X^{(k+1)} = X^{(k)} \cdot P$.

(a) Natürlich benutzt der Weihnachtsmann für jedes Kind eine andere Übergangsmatrix. Wir betrachten die Übergangsmatrix für Bob, die ausdrückt, dass sich das Ereignis der Weihnachtswunscherfüllung (bzw. -nichterfüllung) mit einer Wahrscheinlichkeit von 5/8 aus dem Vorjahr wiederholt. Für die Markov-Kette von Bobs Wunscherfüllung lautet die Übergangsmatrix also

$$P_B = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass die Markov-Kette für Bobs Wunscherfüllung damit beginnt, dass Bob seinen Wunsch erfüllt bekommt, d. h. es gelte $X_B^{(0)} = (1, 0)$.

- **(i)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Bobs Wunscherfüllung in Jahr drei, d. h. berechnen Sie $X_B^{(3)}$.
- **(ii)** Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $X_B^{(k)} = \left(\frac{1}{2}(1 + 4^{-k}), \frac{1}{2}(1 - 4^{-k})\right)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.
- **(iii)** Wie verhält sich $X_B^{(k)}$, wenn k gegen unendlich geht?

(b) Es gibt Kinder, deren jeweilige Übergangsmatrix für ihre Weihnachtswunscherfüllung vorteilhafter ist als die von Bob. Als Beispiel für ein solches Kind betrachten wir Alice, deren Übergangsmatrix gegeben ist durch

$$P_A = \begin{pmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

- **(i)** Zeigen Sie, dass die Verteilung $X_A = (2/3,\ 1/3)$ eine stationäre Verteilung für die Wunscherfüllung von Alice ist, d. h. zeigen Sie, dass $X_A = X_A \cdot P_A$ ist.
- **(ii)** Geben Sie eine stationäre Verteilung für die Wunscherfüllung von Bob in Teilaufgabe (a) an, d. h. geben Sie eine Verteilung X_B an mit $X_B \cdot P_B = X_B$.

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins neue Jahr!