Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

11. Dezember 2012

Diskrete Modellierung

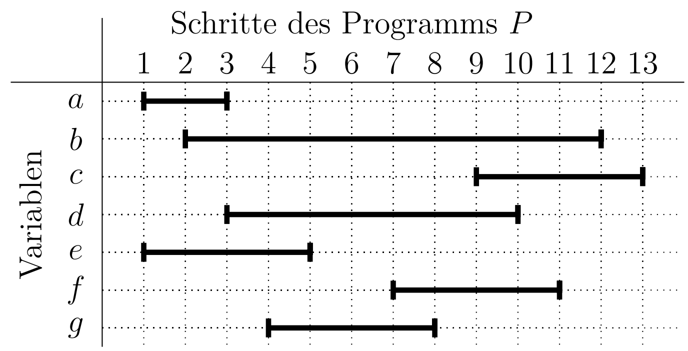
Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis 18. Dezember 2012, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Die meisten Programmiersprachen vermitteln dem Programmierer den Eindruck, ihm ständen potentiell unbeschränkt viele Variablen zur Verfügung, auf die praktisch gleichzeitig zugegriffen werden könne. Allerdings muss bei der tatsächlichen Ausführung des Programms jede Variable, auf die zugegriffen wird, im Hauptspeicher verfügbar sein. Seine Größe ist durch die Hardware begrenzt. In der Entwurfsmethode des Hardware-Software-Codesigns, die bei Eingebetteten Systemen gebräuchlich ist, wird versucht, die Hardware aus Platz-, Energie- und Kostengründen so weit zu reduzieren, dass ein gegebenes Programm gerade noch darauf ausführbar ist.



Wir stellen uns ein Programm P vor, das die sieben Variablen $a, \dots, g$ benutzt, die jeweils eine Hauptspeicherzelle zur Speicherung benötigen. Die nebenstehende Abbildung gibt an, zu welchen Zeitpunkten der Ausführung von P welche Variablen im Hauptspeicher vorhanden sein müssen. So muss die Variable b beispielsweise in den Schritten 2 bis 12 von P im Hauptspeicher vorliegen. Zwei Variablen stehen im Konflikt miteinander, wenn sie nicht dieselbe Speicherzelle benutzen dürfen, da sie gleichzeitig im Hauptspeicher vorhanden sein müssen. Ziel der Aufgabe ist es, herauszufinden, wie viele Zellen der Hauptspeicher zur Ausführung von P haben muss, und in welche Zellen die Variablen im Verlaufe des Programms abgelegt werden können.

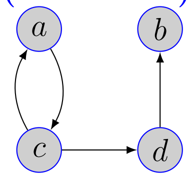
(a) Geben Sie den ungerichteten Konfliktgraphen an, der als Knotenmenge die Variablen besitzt und bei dem eine Kante für einen Konflikt zwischen zwei Variablen steht.

(b) Sei $G = (V, E)$ Ihr Konfliktgraph aus Aufgabenteil (a). Geben Sie eine konfliktfreie Knotenmarkierung $m : V \to \mathbb{N}$ an, die möglichst wenige verschiedene Markierungen verwendet, d. h. $|\text{Bild}(m)|$ soll minimal sein. Wie groß ist $\chi(G)$?

(c) Weisen Sie jeder Variablen a bis g genau eine der Hauptspeicherzellen zu, so dass Variablen, die zueinander in Konflikt stehen, nicht derselben Zelle zugeordnet sind und möglichst wenige verschiedene Speicherzellen benötigt werden.

Aufgabe 2: **(30 Punkte)**

(a) Betrachten Sie den dargestellten gerichteten Graphen $G := (V, E)$. Welche Kanten $(x, y) \in V \times V$ müssen zur Kantenrelation E mindestens hinzugefügt werden beziehungsweise aus E entfernt werden, um eine Kantenrelation zu erhalten, die jeweils



(i) reflexiv ist? **(iii)** antisymmetrisch ist? **(v)** transitiv ist?
(ii) symmetrisch ist? **(iv)** konnex ist? **(vi)** eine Präordnung ist?

(b) Für zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ gilt $\varphi \models \psi$, wenn ψ aus φ semantisch folgt. Über den aussagenlogichen Formeln aus AL sei die Folgerungsrelation wie folgt definiert:

$$F := \{(\varphi, \psi) \in \mathrm{AL} \times \mathrm{AL} \colon \varphi \models \psi\}.$$

Zeigen Sie, dass **(i)** F eine Präordung ist, **(ii)** F keine partielle Ordnung ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Der Index jeder konnexen Äquivalenzrelation ist 1.
(ii) Ist eine Relation transitiv, so ist sie auch konnex.
(iii) Die Vereinigung von zwei linearen Ordnungen über disjunkten Mengen ist wieder eine lineare Ordnung.
(iv) Eine Relation ist genau dann antisymmetrisch, wenn sie nicht symmetrisch ist.
(v) Es gibt eine Äquivalenzrelation, die auch eine partielle Ordnung ist.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien 2^n Münzen gegeben, die wir im Folgenden mit $M_1, \ldots, M_{2^n}$ bezeichnen. Genau eine der Münzen ist schwerer als alle anderen. Diese Münze lässt sich mit Hilfe einer Balkenwaage wie folgt finden:

(i) Falls $n = 0$, ist die gesuchte Münze die einzige, die vorhanden ist.
(ii) Ansonsten vergleiche das Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge $A := \{M_1, \ldots, M_{2^{n-1}}\}$ mit dem Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge $B := \{M_{2^{n-1}+1}, \ldots, M_{2^n}\}$. Ist das Gesamtgewicht von A größer als das von B, muss sich die gesuchte Münze in A befinden und das beschriebene Verfahren wird rekursiv auf die Menge A angewendet, andernfalls wird es rekursiv auf die Menge B angewendet.

(a) Beschreiben Sie das Verfahren für $n = 2$ durch einen Entscheidungsbaum. Wählen Sie hierfür geeignete Kanten- und Knotenbeschriftungen.
(b) Ist der von Ihnen in Teilaufgabe (a) aufgestellte Entscheidungsbaum ein Binärbaum? Ist er ein vollständiger Binärbaum?
(c) Welchen Situationen im Entscheidungsprozess entsprechen die inneren Knoten des Baumes? Welcher Situation entspricht ein Blatt?
(d) Wie viele Wiegevorgänge müssen für 2^n Münzen mindestens durchgeführt werden? Wie viele Wiegevorgänge sind im schlimmsten Fall, also höchstens, nötig?

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei die Relation $\equiv_n$ („*Kongruenz modulo* n“) über $\mathbb{N}$ definiert indem $x \equiv_n y$ genau dann gelte, wenn Zahlen $i, j, k \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $x = in + k$ und $y = jn + k$. (Man erhält also beim Teilen von x durch n den gleichen Rest k wie beim Teilen von y durch n.)

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $\equiv_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation über $\mathbb{N}$ ist.
(b) Geben Sie den Index von $\equiv_n$ in Abhängigkeit von n an.
(c) Geben Sie alle Äquivalenzklassen von $\equiv_5$ an. Geben Sie für jede dieser Äquivalenzklassen zwei unterschiedliche Vertreter an.