Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

4. Dezember 2012

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 11. Dezember 2012, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Die fünf Studierenden Alice, Bob, Carol, Eike und Leo wohnen schon seit einiger Zeit zusammen in einer WG. Da einige der übellaunigen Nachbarn sich mehrfach über die fünf WG-BewohnerInnen beschwert haben, hat sich die Vermieterin angekündigt, um den Zustand der Wohnung zu überprüfen. Da die fünf ungern ihre Wohnung verlieren wollen, beschließen sie, diese doch mal ein wenig aufzuräumen und die schlimmsten Ärgernisse zu beseitigen. Dabei identifizieren sie die folgenden fünf Aufgaben als besonders dringend: das Abtragen des Altglasberges, die Entsorgung aller Pizzaschachteln, das Verstecken von verdächtigen Gewächsen, eine ausführliche Desinfektion des Bades und das Einfangen der Ratten in der Küche. Da alle diese Aufgaben ungefähr gleich anstrengend sind, einigen sie sich darauf, dass jede BewohnerIn genau eine dieser Aufgaben übernehmen wird. Dabei äußern sie folgende Abneigungen:

- Alice hat eine Abneigung gegen jede Aufgabe außer Rattenfangen,
- Bob mag sich weder um die Pizzaschachteln, noch um das Bad, noch um die Gewächse kümmern,
- Carol weigert sich den Altglasberg abzutragen,
- Eike will weder das Bad noch den Altglasberg übernehmen,
- Leo will nicht das Bad desinfizieren und auch nicht die Pizzaschachteln entsorgen.

(a) Stellen Sie den Konfliktgraphen als *ungerichteten* Graphen auf, dessen Knotenmenge die BewohnerInnen und die Aufgaben repräsentiert. Eine Kante in diesem Graphen zwischen BewohnerIn A und Aufgabe B soll dafür stehen, dass A nicht B übernehmen will.

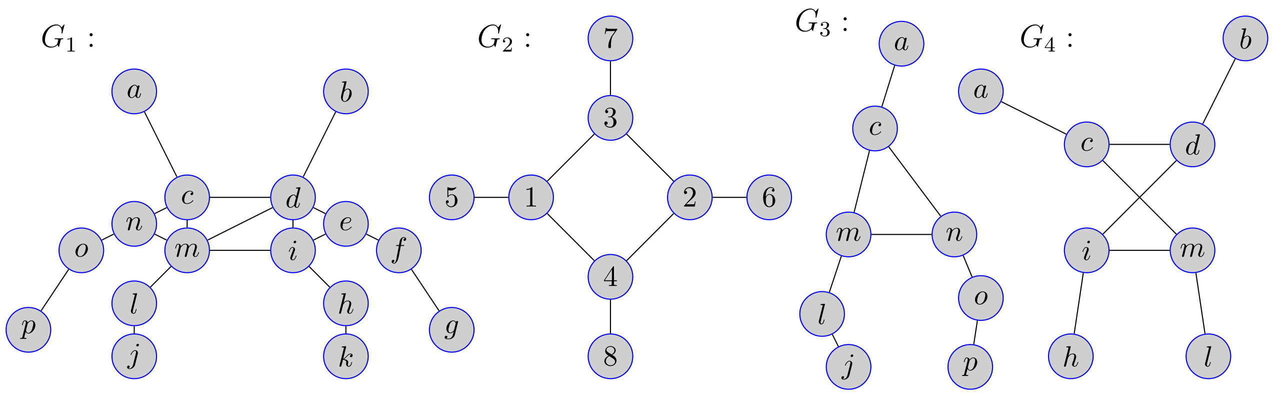
(b) Geben Sie auf der Grundlage Ihres Konfliktgraphen einen *ungerichteten* „Zufriedenheitsgraphen" mit der gleichen Knotenmenge an. Eine Kante in diesem „Zufriedenheitsgraphen" zwischen BewohnerIn A und Aufgabe B soll bedeuten, dass A einverstanden wäre B zu übernehmen.

(c) Geben sie ein Matching maximaler Größe in Ihrem „Zufriedenheitsgraphen" an.

(d) Geben Sie eine Zuordnung zwischen BewohnerInnen und Aufgaben an, so dass jede BewohnerIn genau eine Aufgabe erhält, jede Aufgabe genau einmal zugeordnet wird und alle BewohnerInnen mit ihrer Zuordnung zufrieden sind.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden ungerichteten Graphen:



Für welche Zahlen $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$ gelten die folgenden Aussagen?

(a) $G_i \cong G_j$.

(b) G_i ist ein Teilgraph von G_j.

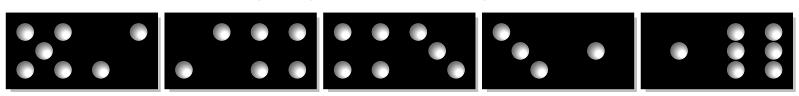
(c) G_i ist ein induzierter Teilgraph von G_j.

(d) Es existiert ein Teilgraph G'_j von G_j, der isomorph zu G_i ist.

Geben Sie für **(a)** jeweils einen Isomorphismus von G_i nach G_j an, falls ein solcher existiert. Geben Sie für **(d)** jeweils einen Teilgraphen G'_j von G_j und einen Isomorphismus von G_i nach G'_j an, wenn diese existieren.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Die Menge $Dom_n := \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{N}_{>0}, x \neq y, 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$ repräsentiert eine Teilmenge aller möglichen Dominosteine. Das Element $\{x, y\} = \{y, x\}$ steht für den Stein, der x Augen auf der einen und y Augen auf der anderen Hälfte zeigt, wobei $x \neq y$ für jeden Stein in Dom_n gilt. Die maximal vorkommende Augenzahl auf einer Steinhälfte wird mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ bezeichnet. Zwei Steine können aneinander gelegt werden, wenn ihre benachbarten Augenzahlen gleich sind. Mehrere aneinander gelegte Steine ergeben eine Kette, die beispielsweise wie folgt beginnt:



$\cdots$

Ist es möglich, eine einzelne Kette ohne Verzweigungen so zu legen, dass jeder Stein aus Dom_n genau einmal vorkommt?

(a) Modellieren Sie diese Frage als ein Problem für einen geeigneten Graphen.

(b) Gibt es eine Kette für $n = 19$? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Kette, für welche nicht?

(d) Zu Dom_n werden alle Steine hinzu getan, deren Augenzahl pro Hälfte höchstens n beträgt und die auf beiden Hälften die gleiche Augenzahl zeigen. Es entsteht $Dom'_n = Dom_n \cup \{\{x, x\} : x \in \mathbb{N}_{>0}, 1 \leq x \leq n\}$. Für welche $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es eine verzweigungsfreie Kette, die alle Steine aus Dom'_n genau einmal benutzt?

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *selbstkomplementär*, wenn er isomorph zu seinem Komplement $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ ist. Dabei ist $\tilde{V} := V$ und $\tilde{E} := \{\{x, y\} : x, y \in V,\ x \neq y,\ \{x, y\} \notin E\}$.

(a) Geben Sie für alle $n \in \{1, 4, 5\}$ selbstkomplementäre Graphen mit genau n Knoten an.

(b) Beweisen Sie, dass für die Knotenanzahl $|V|$ jedes selbstkomplementären Graphen $G = (V, E)$ gilt: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ so dass $|V| = 4k$ oder $|V| = 4k + 1$.