Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

27. November 2012

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

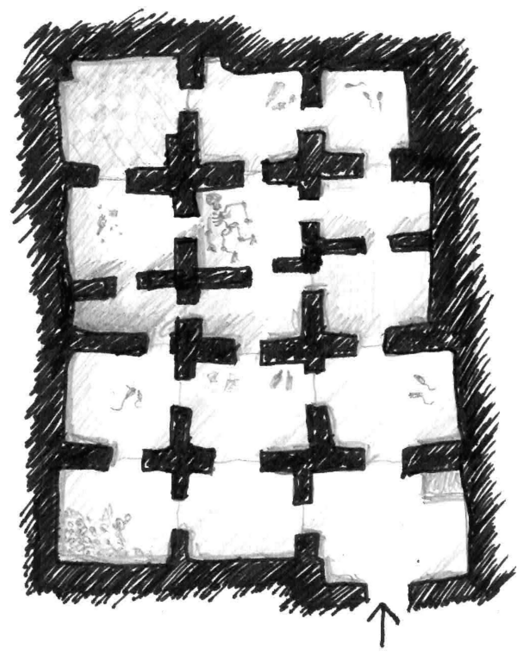
Übungsblatt 6

Abgabe: *bis 4. Dezember 2012, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage: In einem endlichen, bipartiten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ und einer ungeraden Anzahl von Knoten kann es keinen Hamilton-Kreis geben.

(b) Tief versteckt in den nebligen Wäldern des Taunus steht am Rande eines kleinen Dorfes eine finstere alte Villa. Hier haust die unheimliche Gräfin D'Ismod mit ihrem buckligen Butler Igor und verbringt ihre Zeit damit, die Dorfbewohner zu beunruhigen und seltene Weine zu sammeln.



Eines Tages hat die Gräfin Lust auf einen besonders seltenen Wein und gibt Igor den Auftrag, eine Flasche *Königsberger Eulenkopf 1857* aus dem Keller zu holen. Igor ist sich zwar sicher, dass die letzte Flasche dieses Weines bereits vor ein paar Jahren verbraucht wurde, allerdings besteht die Gräfin darauf, dass er in jedem einzelnen Raum ihres ausgedehnten Weinkellers nachsieht.

Der Weinkeller besteht aus 15 Räumen, die in einem Rechteck (3 Räume in der Breite, 5 Räume in der Länge) angeordnet sind. Die Treppe, die die einzige Verbindung zwischen Keller und Außenwelt darstellt, befindet sich in der rechten unteren Ecke. Aus jedem Raum kann man entlang der vier Hauptrichtungen die benachbarten Räume betreten – Igor kann sich also einen Raum nach links, rechts, oben oder unten bewegen, aber nicht entlang der Diagonalen.

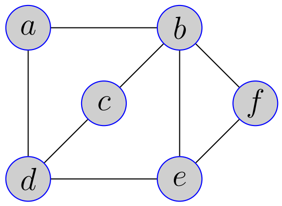
Igor sucht nun eine Route durch den Keller, die ihn vom Raum mit der Treppe zu jedem Raum des Kellers bringt und schließlich wieder im Raum mit der Treppe endet. Da der Auftrag schon mühsam genug ist, will Igor den Raum mit der Treppe nur zweimal betreten (nämlich zu Beginn und Ende seiner Route), und jeden der anderen Räume nur ein einziges Mal.

Kann Igor eine solche Route finden? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist. (Sie können dafür die Aussage aus Teilaufgabe (a) benutzen, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.)

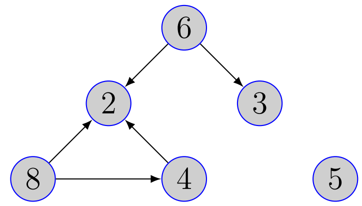
Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Betrachten Sie folgende Graphen:

G_1 :



G_2 :



- $G_3 := (V_3, E_3)$ mit $V_3 := \{1, \dots, 8\}$ und
$$E_3 := \{(x, y) \colon x, y \in V_3, x \neq y, x \text{ ist durch } y \text{ teilbar}\}$$
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $G_{4,n} := (V_{4,n}, E_{4,n})$ mit $V_{4,n} := \{a, b\}^n$ und
$$E_{4,n} := \Big\{\{x, y\} \colon \text{Die Worte } x, y \in V_{4,n} \text{ unterscheiden sich an genau einer Position}\Big\}.$$

(a) Geben Sie die Knoten- und Kantenmengen der Graphen G_1 und G_2 an. Repräsentieren Sie G_1 durch eine Adjazenzliste und G_2 durch eine Adjazenzmatrix.

(b) Geben Sie für die Graphen G_3 und $G_{4,3}$ eine graphische Darstellung an.

(c) Welche der Graphen G_1 und $G_{4,n}$ für $n \geq 1$ sind bipartit?

(d) Ist G_2 ein induzierter Teilgraph von G_3?

(e) Geben Sie einen einfachen Kreis maximaler Länge in G_1 an.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Gegeben sei die Formel
$$\varphi := \neg(V_1 \to \neg V_2) \vee \neg(V_1 \leftrightarrow \neg V_3) \vee \neg((V_2 \vee V_4) \to V_5)$$

(a) Transformieren Sie φ durch Äquivalenzumformungen (z.B. wie in Beobachtung 3.37) in eine äquivalente Formel in NNF.

(b) Transformieren Sie φ durch Äquivalenzumformungen (z.B. wie in Algorithmus 3.40) in eine äquivalente Formel in DNF.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ genau $2 \cdot n$ verschiedene aussagenlogische Variablen, und sei
$$\varphi_n \;:=\; \bigwedge_{i=1}^{n} (X_i \leftrightarrow Y_i).$$

(a) Geben Sie eine zu φ_n äquivalente Formel in KNF an.

(b) Beschreiben Sie die erfüllenden Belegungen $\mathcal{B} \colon \text{Var}(\varphi_n) \to \{0, 1\}$ für φ_n. Geben Sie eine zu φ_n äquivalente Formeln in DNF an.

(c) Beweisen Sie Satz 3.44, d.h. beweisen Sie, dass jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n konjunktive Klauseln hat.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dazu an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \dots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Ihrer Antwort aus Teil (b), dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ von mindestens zwei verschiedenen die Formel φ_n erfüllenden Belegungen wahr gemacht wird. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.