Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt 20. November 2012

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 5

Abgabe: *bis 27. November 2012, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Alice besucht gerade die ruhige Kleinstadt *Hamster City*, als etwas Unerfreuliches geschieht: Aus dem nahe gelegenen Entwicklungslabor eines großen Konzerns entweicht ein Virus, das die meisten der Bewohner von Hamster City (und auch manche Tiere) in Zombies verwandelt.

Für Alice ist das kein sonderliches Problem, da sie über genug Waffen und Munition verfügt und außerdem reichlich Erfahrung mit solchen Situationen hat. Aus Erfahrung weiß sie, dass Zombies folgende Eigenschaften haben können: Manche Zombies sind schnell, einige können klettern, manche tragen einen Anzug, und manche waren früher keine normalen Mitbürger, sondern sind zombifizierte Hamster. (Prinzipiell können auch Zombiehamster einen Anzug tragen.) Nachdem sie einige Hundert Zombies unschädlich gemacht hat, fällt ihr auf, dass diese Eigenschaften bei dieser Zombiehorde wie folgt zusammenhängen:

(1) Wenn der Zombie nicht schnell ist, dann kann er nicht klettern.
(2) Wenn der Zombie keinen Anzug trägt, dann ist er nicht schnell.
(3) Kann der Zombie klettern und ist kein Zombiehamster, dann trägt er keinen Anzug.
(4) Trägt der Zombie einen Anzug, dann ist er kein Zombiehamster oder kann nicht klettern.

(a) Formalisieren Sie jede der Aussagen (1)–(4) durch eine aussagenlogische Formel und geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die widerspiegelt, dass jede der Aussagen (1)–(4) erfüllt ist. Verwenden Sie dazu die Variablen S, A, K und H um die atomare Aussage „der Zombie ist schnell“, „der Zombie trägt einen Anzug“, „der Zombie kann klettern“ bzw. „der Zombie ist ein Zombiehamster“auszudrücken.

Betrachten Sie nun die nachfolgenden Aussagen:

(5) Ist der Zombie ein Zombiehamster, dann trägt er keinen Anzug.
(6) Der Zombie kann nicht klettern.
(7) Der Zombie kann nicht klettern, außerdem trägt er einen Anzug oder ist nicht schnell.
(8) Ist der Zombie kein Zombiehamster, dann trägt er einen Anzug oder ist nicht schnell.

(b) Geben Sie für jede der vier Aussagen eine aussagenlogische Formel an, die die Aussage repräsentiert.

(c) Entscheiden Sie für jede der vier aussagenlogischen Formeln aus (b), ob sie aus der Formel φ in (a) folgt und ob sie semantisch äquivalent dazu ist. Welche zum Überleben überaus nützlichen Informationen lassen sich aus diesen Beobachtungen ableiten?

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Die Sprache AL ist gemäß Definition 3.3 die Menge aller syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln.

Wir geben im Folgenden eine rekursive Definition einer Funktion $f\colon \mathrm{AL} \to \mathbb{N}$ an, so dass $f(\varphi)$ für jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ die Anzahl der Knoten des Syntaxbaums von φ angibt:

(I) $f(\mathbf{1}) := 1, \quad f(\mathbf{0}) := 1, \quad f(X) := 1 \quad$ für alle $X \in \textsc{Avar}$.

(II) $f(\neg\varphi) := 1 + f(\varphi) \quad$ für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$.

(III) $f((\varphi \wedge \psi)) := 1 + f(\varphi) + f(\psi), \quad f((\varphi \vee \psi)) := 1 + f(\varphi) + f(\psi),$
$f((\varphi \to \psi)) := 1 + f(\varphi) + f(\psi), \quad f((\varphi \leftrightarrow \psi)) := 1 + f(\varphi) + f(\psi) \quad$ für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$.

(a) Geben Sie die rekursive Definition einer Funktion $g\colon \mathrm{AL} \to \mathbb{N}$ an, so dass $g(\varphi)$ für jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ die Länge von φ, aufgefasst als Wort über dem Alphabet A_{AL}, angibt. (Beispielsweise gilt für $\varphi := ((V_1 \to \neg V_2) \leftrightarrow (\neg V_3 \wedge \mathbf{1}))$, dass $f(\varphi) = 9$ und $g(\varphi) = 15$.)

(b) Beweisen Sie durch eine Induktion über den Aufbau von AL, dass für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$ gilt: $f(\varphi) \leq g(\varphi)$.

(c) Beweisen Sie, dass es eine Zahl $c \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$ gilt: $g(\varphi) \leq c \cdot f(\varphi)$.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

(a) Entscheiden Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln, ob sie jeweils erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel eine erfüllende Belegung, für jede nicht allgemeingültige Formel eine nicht erfüllende Belegung an.

(i) $((V_2 \wedge \mathbf{1}) \vee \mathbf{0})$

(ii) $(\neg(V_1 \to \mathbf{0}) \to V_1)$

(iii) $(V_1 \to (V_2 \to V_1))$

(iv) $((\mathbf{1} \to V_1) \wedge (V_1 \to \mathbf{0}))$

(v) $\psi_n := \bigwedge_{i=1}^{n} (\neg V_i \to V_{i+1}) \quad$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$

(b) Betrachten Sie die Formeln

$$\varphi_1 := \neg V_3 \vee V_2 \vee \neg V_1, \qquad \varphi_2 := \neg V_3 \vee V_2 \vee (\neg V_1 \wedge V_3), \qquad \varphi_3 := V_2 \vee (\neg V_1 \wedge V_3)$$

und geben Sie an, welche dieser Formeln logisch äquivalent zueinander sind, beziehungsweise welche aus welcher semantisch folgt.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

(a) Es sei $\varphi := ((V_1 \wedge V_2) \vee \neg(V_1 \leftrightarrow \neg V_3))$. Konstruieren Sie die Wahrheitstafel zu φ. Erzeugen Sie aus dieser Wahrheitstafel eine zu φ logisch äquivalente aussagenlogische Formel φ' in DNF.

(b) Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie in DNF, KNF und/oder NNF ist.

(i) $((V_0 \wedge \neg V_1) \vee (\neg V_1 \wedge \neg V_0))$

(ii) $((\mathbf{0} \vee \neg V_2) \to V_2)$

(iii) $\neg V_2 \wedge (V_5 \vee \neg V_1)$

(iv) $(V_3 \wedge V_5)$

(v) $\neg V_2 \wedge ((V_1 \wedge \neg V_0) \vee V_3)$

(vi) $(\neg(\neg V_3 \vee \neg V_3) \wedge \neg V_3)$