Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

13. November 2012

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 4

Abgabe: *bis 20. November 2012, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

Heute ist Sheldons Geburtstag. Penny hat ihm deshalb gestern einen Erdnusskuchen gebacken. Diesen hat sie vorsichtshalber über die Nacht auf ihrem Küchenschrank versteckt. Da Sheldon, sein Mitbewohner Leonard und ihre Freunde Raj und Howard jedoch gelegentlich für Penny Pakete entgegennehmen und in Ausnahmefällen sogar nächtens ihr Appartement aufräumen, haben sie einen Zweitschlüssel für ihre Tür. So ist das Unvermeidliche geschehen: Sheldons Geburtstagskuchen ist am Morgen – bis auf einige Krümel – unauffindbar.

Penny hat fest geschlafen und versucht nun den oder die Schuldigen zu finden. Folgendes steht fest:

I. Abgesehen von Sheldon, Leonard, Raj und Howard (sowie Penny, die den Kuchen aber bestimmt nicht gegessen hat) hat niemand sonst einen Schlüssel zu Pennys Appartement.

II. Howard hat sich aufgrund seiner Erdnussallergie nicht am Kuchenraub beteiligt.

III. Raj hätte sich höchstens getraut, in Pennys Appartement einzubrechen, wenn Sheldon vorangegangen wäre.

IV. Wenn Sheldon in Pennys Appartement eingebrochen wäre, dann wäre Leonard mitgekommen, um Schlimmeres zu verhindern.

V. Leonard ist zu klein, um den Kuchen vom Küchenschrank zu holen und war daher – wenn überhaupt – sicher kein Einzeltäter.

(a) Übersetzen Sie die Aussagen I–V in aussagenlogische Formeln, die die jeweilige Forderung widerspiegeln. Benutzen Sie dazu die aussagenlogischen Variablen H, L, R und S mit der Bedeutung, dass **H**oward beziehungsweise **L**eonard, **R**aj oder **S**heldon am Kuchenraub beteiligt waren.

(b) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel φ auf, die die aussagenlogischen Variablen H, L, R und S benutzt und die widerspiegelt, dass die Forderungen I–V gleichzeitig erfüllt sein müssen.

(c) Stellen Sie eine Wahrheitstafel für die Formel φ auf.

(d) Kann es sein, dass das Geburtstagskind Sheldon von seinem eigenen Geburtstagskuchen genascht hat? Wenn ja, geben Sie eine erfüllende Belegung $\mathcal{B}\colon \{H, L, R, S\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{B}(S) = 1$ für die Formel φ an.

(e) Können Sie sicher sein, dass Raj unter den Schuldigen ist? Wenn nein, so geben Sie eine erfüllende Belegung $\mathcal{B}'\colon \{H, L, R, S\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{B}'(R) = 0$ für die Formel φ an.

Aufgabe 2: **(24 Punkte)**

Betrachten Sie folgende Wörter:

$\neg\neg\neg V_2$	$((V_1 \to V_2))$	$(V_3 = \mathbf{0})$
$(\varphi \vee \psi)$	$\mathbf{10}$	$((V_1 \wedge V_3) \leftrightarrow (\neg V_2 \vee V_3))$
$((V_1 \to V_2) \to V_3)$	$(V_1 \wedge V_3 \wedge V_2)$	$(V_3 \leftarrow (V_1 \to V_2))$

(a) Geben Sie die Menge M derjenigen der oben aufgeführten Worte an, die gemäß der Definition 3.3 aus dem Vorlesungsskript zur Sprache AL gehören.

(b) Lösen Sie folgende Teilaufgaben für alle aussagenlogischen Formeln $\varphi \in M$:

(i) Beweisen Sie, dass φ gemäß Definition 3.3 zur Sprache AL gehört.

(ii) Geben Sie den Syntaxbaum von φ an.

(iii) Geben Sie $\mathrm{Var}(\varphi)$ an.

Aufgabe 3: **(21 Punkte)**

(a) Berechnen Sie den Wert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}}$ der aussagenlogischen Formel

$$\varphi := ((\neg V_1 \wedge \mathbf{1}) \to \neg(V_2 \vee \neg V_3))$$

unter der Belegung $\mathcal{B} : \mathrm{Var}(\varphi) \to \{0, 1\}$ mit

$$\mathcal{B}(V_1) = 0, \quad \mathcal{B}(V_2) = 1, \quad \mathcal{B}(V_3) = 0$$

in nachvollziehbaren Schritten, das heißt analog zu Beispiel 3.10 aus der Vorlesung.

(b) Gegeben sei die folgende aussagenlogische Formel

$$\psi := ((\neg V_1 \vee V_2) \leftrightarrow \neg(V_1 \vee \mathbf{0}))$$

Geben Sie Belegungen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 : \mathrm{Var}(\psi) \to \{0, 1\}$ an, so dass $[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}_1} = \mathbf{1}$ und $[\![\psi]\!]^{\mathcal{B}_2} = \mathbf{0}$ gilt. Belegen Sie die Korrektheit Ihrer Belegungen analog zu Beispiel 3.10 aus der Vorlesung.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Sei $A = \{a, b, c, \langle, \rangle, [,], \circ\}$. Die Sprache $\mathrm{TL} \subseteq A^*$ sei wie folgt rekursiv definiert:

Basisregel:	(B)	Es gilt: $a, b, c \in \mathrm{TL}$.
Rekursive Regeln:	(R1)	Ist $w \in \mathrm{TL}$, so ist auch $[w] \in \mathrm{TL}$.
	(R2)	Sind $w_1 \in \mathrm{TL}$ und $w_2 \in \mathrm{TL}$, so ist auch $\langle w_1 \circ w_2 \rangle \in \mathrm{TL}$.

(a) Welche der folgenden Aussagen gelten, welche nicht?

(i) $\langle [\langle c \circ b \rangle] \circ a \rangle \in \mathrm{TL}$

(ii) $\langle [a \circ b] \rangle \in \mathrm{TL}$

(iii) $\varepsilon \in \mathrm{TL}$

(iv) $\varepsilon \in \mathrm{TL}^*$

(b) Die Funktion $f : \mathrm{TL} \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

(i) $f(a) := 3,\ f(b) := 36,\ f(c) := 303$.

(ii) Für jedes $w \in \mathrm{TL}$ sei $f([w]) := f(w) + 6$.

(iii) Für alle $w_1, w_2 \in \mathrm{TL}$ sei $f(\langle w_1 \circ w_2 \rangle) := f(w_1) + f(w_2)$.

Berechnen Sie $f([[[a]]])$ und $f([\langle b \circ [c] \rangle])$.

Beweisen Sie außerdem durch Induktion über den Aufbau von TL, dass Folgendes gilt:

Für alle $w \in \mathrm{TL}$ ist $f(w)$ durch 3 teilbar.