Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

6. November 2012

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 3

Abgabe: *bis 13. November 2012, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: **(40 Punkte)**

Der Kaiser von Transarkanien stellt zwei Hofinformatiker/-innen ein. Er verfügt über fast unbegrenzte Reichtümer und ist deshalb bereit, den Gehaltsvorstellungen qualifizierten Personals weitgehend entgegenzukommen. Die erste Bewerberin ist Frau Lovelace. Sie stellt sich ihr Gehalt folgendermaßen vor:

> *Im ersten Monat bei Hof erwarte ich nur eine einzige transarkanische Sesterze, ab dem zweiten Monat jedoch jeweils doppelt so viele transarkanische Sesterzen wie im Vormonat.*

Der zweite Bewerber, Herr Leibowitz, hat ein anderes Gehaltsmodell im Sinn:

> *Im ersten Monat erwarte ich 1000 transarkanische Sesterzen, und danach im n-ten Monat meiner Einstellung das Gehalt des (n-1)-ten Monats sowie zusätzlich das 100-fache der Nummer n des Monats.*

(a) Für welches der beiden Gehaltsmodelle würden Sie sich entscheiden?

(b) Formulieren Sie die monatliche Entwicklung des Gehalts von Frau Lovelace und Herrn Leibowitz als zwei rekursive Funktionen $f, g\colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$.

(c) Welche der beiden Funktionen f, g hat im Allgemeinen ein schnelleres Wachstum?

(d) Finden Sie ein $n_0 \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass entweder

$$f(n) \geq g(n) \qquad \text{oder} \qquad f(n) \leq g(n)$$

für alle $n \geq n_0$.

(e) Beweisen Sie per Induktion, dass Ihre Antwort in der Teilaufgabe (d) korrekt ist.

Aufgabe 2: **(27 Punkte)**

Seien A, B und C Mengen. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Falls $(A \setminus B) \subseteq C$, so ist $(A \setminus C) \subseteq B$.

Aufgabe 3: **(33 Punkte)**

Wir betrachten die Funktionen $f, g \colon \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$f(n,k) := \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^k = (1 + \cdots + n)^k \qquad \text{und} \qquad g(n,k) := \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} = 1^{k+1} + \cdots + n^{k+1}.$$

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips, dass $f(n,2) = g(n,2)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(b) Gilt $f(n,k) = g(n,k)$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$? Beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Zur Erinnerung: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i \quad = \quad \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Aufgabe 4: **(keine Punkte)**

Diese Aufgabe wird auf Übungsblatt 4 verschoben. Sie müssen diese Aufgabe nicht bis zum 13. November bearbeiten, sondern erst bis zum 20. November. Die Punktezahlen der anderen drei Aufgaben wurden entsprechend erhöht.

Sei $A = \{a, b, c, \langle, \rangle, [,], \circ\}$. Die Sprache TL $\subseteq A^*$ sei wie folgt rekursiv definiert:

Basisregel:	(B)	Es gilt: $a, b, c \in \text{TL}$.
Rekursive Regeln:	(R1)	Ist $w \in \text{TL}$, so ist auch $[w] \in \text{TL}$.
	(R2)	Sind $w_1 \in \text{TL}$ und $w_2 \in \text{TL}$, so ist auch $\langle w_1 \circ w_2 \rangle \in \text{TL}$.

(a) Welche der folgenden Aussagen gelten, welche nicht?

(i) $\langle [\langle c \circ b \rangle] \circ a \rangle \in \text{TL}$

(ii) $\langle [a \circ b] \rangle \in \text{TL}$

(iii) $\varepsilon \in \text{TL}$

(iv) $\varepsilon \in \text{TL}^*$

(b) Die Funktion $f : \text{TL} \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

(i) $f(a) := 3,\ f(b) := 36,\ f(c) := 303.$

(ii) Für jedes $w \in \text{TL}$ sei $f([w]) := f(w) + 6$.

(iii) Für alle $w_1, w_2 \in \text{TL}$ sei $f(\langle w_1 \circ w_2 \rangle) := f(w_1) + f(w_2)$.

Berechnen Sie $f([[[a]]])$ und $f([\langle b \circ [c] \rangle])$. Beweisen Sie außerdem durch Induktion über den Aufbau von TL, dass Folgendes gilt:

Für alle $w \in \text{TL}$ ist $f(w)$ durch 3 teilbar.