Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

30. Oktober 2012

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 6. November 2012, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir das Spiel *NimHalbe*, das wie folgt definiert ist: Zwei Spieler, Alice und Bob, spielen gegeneinander. Zu Beginn des Spiels liegen 5176 Hölzer auf dem Tisch. Die beiden Spieler sind abwechselnd am Zug, Alice beginnt. In jedem Zug kann der Spieler, der gerade an der Reihe ist, entweder drei Hölzer vom Tisch entfernen oder, falls eine gerade Anzahl an Hölzern auf dem Tisch liegt, den Haufen halbieren, also die Hälfte der Hölzer vom Stapel nehmen. So kann Alice im ersten Zug drei Hölzer vom Tisch nehmen (es verbleiben 5173) oder den Stapel halbieren (es verbleiben 2588). Hiernach ist Bob am Zug und kann bei 2588 Hölzern wieder zwischen beiden Optionen wählen; bei 5173 Hölzern ist er gezwungen, drei davon wegzunehmen. Es gewinnt der Spieler, der eine Anzahl von Hölzern auf dem Tisch hinterlässt, die eine Primzahl ist. (Achtung: 1 ist keine Primzahl.)

Modellieren Sie zur Beantwortung der folgenden Fragen das Spiel analog zum Beispiel 1.1 aus der Vorlesung durch ein Transitionssystem.

(a) Ist es eine gute Idee für Alice, im ersten Zug gleich den Stapel zu halbieren?

(b) Eine Gewinnstrategie für einen Spieler in diesem Spiel ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als nächstes tätigen soll. Hält sich der Spieler an diese Vorschrift, so gewinnt er auf jeden Fall. Existiert in diesem Spiel eine Gewinnstrategie für Alice?

(c) Existiert eine Gewinnstrategie für Bob?

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Seit 1951 ist die *Pupille* das Kino der Johann Wolfgang Goethe-Universität[1]. Im Folgenden ist es Ihre Aufgabe, verschiedene Aspekte des Spielplans der Pupille mit Hilfe von Wertebereichen zu modellieren. Sie können die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen, eine Menge *Filme* von Filmtiteln und eine Menge *Knabbereien* von an der Theke der Pupille angebotenen Knabbereien voraussetzen.

(a) Definieren Sie die Mengen *WiSe1213* und *SoSe13* aller Tage, die in den Monaten Oktober, November, Dezember 2012 sowie Januar oder Februar 2013 beziehungsweise in den Monaten April bis Juli 2013 liegen. Nutzen Sie dazu die Relation *Gültig* aus Beispiel 2.27 des Vorlesungsskripts.

[1]http://www.pupille.org

(b) Nach jedem Film ist aus den entstehenden Abfallbergen ersichtlich, wie viele und welche Knabbereien vom Publikum gekauft wurden. Definieren Sie eine Menge *Verzehr*, deren Elemente jeweils für einen Film, einen Tag und eine Knabberei angeben, wie viele Packungen von dieser während des Filmes an diesem Tag verzehrt wurden.

(c) Welches Element der Menge *Verzehr* sagt aus, dass am 20. 12. 2012 während der Vorführung von "Melancholia" 37 Tüten Gummibärchen verbraucht wurden?

(d) Definieren Sie die Menge *Studienjahr1213* aller Tage aus den Mengen *WiSe1213* und *SoSe13* sowie eine Menge *Gespielt*, so dass jedem Tag im Wintersemester 2012/13 oder Sommersemester 2013 durch eine Funktion *Spielplan*: *Studienjahr1213* $\to$ *Gespielt* ein (eventuell leeres) Tupel von Filmen aus der Menge *Filme* zugewiesen werden kann.

(e) Definieren Sie die Teilmenge *Einzelvorführungen* der Menge *Studienjahr1213*, die alle Tage enthält, an denen genau ein Film vorgeführt wird.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

(a) Geben Sie alle Relationen von $A := \{a, b\}$ nach $B := \{2, 3\}$ an. Geben Sie für jede Relation an, ob sie eine Funktion von A nach B oder eine partielle Funktion von A nach B oder keines von beiden ist. Geben Sie außerdem für jede Funktion an, ob sie injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist.

(b) Geben Sie für jede der folgenden Funktionen f an, ob die Funktion injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist. Geben Sie jeweils auch das Bild von f an.

- **(i)** $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^4$ für alle $x \in \mathbb{Z}$
- **(ii)** $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) := (-1)^x x^2$ für alle $x \in \mathbb{N}$
- **(iii)** $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_{>0}$ mit $f(x) := \begin{cases} 2|x| + 1 & \text{für } x \in \mathbb{Z},\ x \geq 0 \\ 2|x| & \text{für } x \in \mathbb{Z},\ x < 0 \end{cases}$
  (dabei gilt für $x \in \mathbb{Z}$: $|x| := x$ falls $x \geq 0$ und $|x| := -x$ falls $x < 0$)
- **(iv)** $f\colon A^* \to \mathbb{N}$ für eine beliebige Menge A mit $|A| = 1$ und $f(w) := |w|$ für alle $w \in A^*$
- **(v)** $f\colon A^* \to \mathbb{N}$ für eine beliebige Menge A mit $|A| = 2$ und $f(w) := |w|$ für alle $w \in A^*$

Aufgabe 4: (25 Punkte)

(a) Beweisen Sie Satz 2.38(b), d.h.: Sei B eine Menge, sei A eine endliche Menge und sei $k := |A|$. Zeigen Sie, dass es eine bijektive Funktion von $\mathrm{Abb}(A, B)$ nach B^k gibt.

(b) Seien X und Y endliche Mengen und $f \subseteq X \times Y$ eine Relation von X nach Y. Wir definieren die Relation $\widetilde{f}$ als Relation von Y nach X wie folgt:

$$\text{Für alle } x \in X,\ y \in Y \text{ gilt:} \quad (y, x) \in \widetilde{f} :\Longleftrightarrow (x, y) \in f,$$

Beweisen Sie, dass die folgende Aussage korrekt ist: f ist genau dann eine bijektive Funktion, wenn $\widetilde{f}$ eine bijektive Funktion ist.[2]

[2] In diesem Falle wird $\widetilde{f}$ die *Umkehrfunktion* von f genannt und üblicherweise mit f^{-1} bezeichnet.