Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

23. Oktober 2012

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2012/2013

Übungsblatt 1

Abgabe: *bis 30. Oktober 2012, 8.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 114 und 115 in der Robert-Mayer-Str. 11–15)*

*Bitte achten Sie darauf, dass Sie auf der Abgabe Ihrer Lösung Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihre **Übungsgruppe** angeben. Fehlt eine dieser Angaben, müssen Sie mit **Punktabzug** rechnen. Mehrseitige Abgaben müssen zusammengeheftet werden. Eine verspätete Abgabe ist **nicht** möglich!*

*Für dieses Übungsblatt und **alle** folgenden gilt: Eine Aufgabe gilt nur dann als vollständig bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.*

Aufgabe 1: **(29 Punkte)**

Die Piraten Jack Sparrow und Barbossa sind auf einer einsamen Insel gestrandet. Von ihrem sinkenden Schiff konnten sie ein Fass mit Rum (8 Liter) sowie zwei leere Fässer der Größen 3 Liter und 5 Liter retten. Da keiner dem anderen richtig traut, wollen sie den Rum aufteilen, so dass sich jeder mit seinem Anteil an ein Ende der Insel zurückziehen kann.

Ziel ist es, in zwei Fässern jeweils genau die Menge von vier Litern Rum zu haben. Da sich an den Fässern keine Markierungen befinden, können die beiden Piraten ihr Ziel nur erreichen, indem sie schrittweise eines der Fässer in das andere kippen bis eines der Fässer voll oder leer ist. Da Piraten faul sind, werden sie außerdem darauf achten, niemals in den Startzustand mit dem vollen 8-Liter Fass zurückkehren. Zusätzlich dazu vermeiden sie den Zustand, in dem sowohl das 3-Liter Fass als auch das 5-Liter Fass komplett voll sind, da dieser genauso ungünstig ist.

Modellieren Sie zur Beantwortung der folgenden Fragen das Problem durch ein Transitionssystem analog zum „Murmelbeispiel“ aus der Vorlesung.

(a) Können Jack und Barbossa ihr Ziel erreichen?

(b) Für Jack ist es unerträglich, nicht voran zu kommen. Er möchte deshalb niemals eine gerade getätigte Aktion direkt wieder rückgängig machen. Nehmen Sie nun an, dass Jack keine Aktion direkt wieder rückgängig macht und ansonsten (unter Berücksichtigung der Regeln) wahllos vorgeht. Wird er dann zwangsläufig irgendwann in den Zustand kommen, in dem er sein Ziel erreicht hat?

(c) Nehmen wir nun an, Jack wäre nicht mit Barbossa, sondern mit zwei namenlosen Handlangern auf der Insel gestrandet. Da acht Liter Rum nicht gut durch drei zu teilen sind, beschließt Jack, sich selbst sechs Liter und den anderen beiden großzügigerweise jeweils einen Liter zuzuteilen. Ist dies unter Berücksichtigung der Regeln möglich?

Aufgabe 2: **(20 Punkte)**

Sei $M := \{1, 2, 4\}$, $N := \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade}\}$ und $P := \{2x + 1 : x \in \mathbb{N}\}$. Schreiben Sie jede der folgenden Mengen in extensionaler Form auf und geben Sie ihre Kardinalität an. (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(a) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \in M\}$

(b) $\{\clubsuit, \spadesuit\} \times \{\spadesuit, \heartsuit\}$

(c) $M \times (N \cap P)$

(d) $\{(x, y, z) \in M^3 : x \cdot y = z\}$

Sei $U := \mathbb{N}$ ein festes Universum. Gelten die folgenden Aussagen? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(e) $\{1, 2, 4\} \in M^3$

(f) $N = \{x + y \colon (x, y) \in P \times P\}$

(g) $42 \in \overline{\overline{(N \cup P)} \cap (M \cup P)}$

(h) $P \subsetneqq \bigcap_{X \in \mathcal{P}(P)} (X \cup P)$

Aufgabe 3: **(26 Punkte)**

Gelten die folgenden Gleichungen für alle Mengen X, Y und Z? Wenn Sie von der Korrektheit einer der Gleichungen überzeugt sind, so beweisen Sie diese. Geben Sie anderenfalls Mengen an, für welche die jeweilige Gleichung nicht gilt.

(a) $X^2 \cap Y^2 = (X \cap Y)^2$

(b) $X^2 \cup Y^2 \subseteq (X \cup Y)^2$

(c) $X \not\subseteq \mathcal{P}(X)$

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Der Comicfan Jeff Albertson hat eine Liste seiner Lieblingssuperhelden erstellt. Dabei berücksichtigt er nur solche Helden, die bestimmte Eigenschaften haben: Um auf seiner Liste zu stehen, muss ein Superheld fliegen können, ein Cape tragen oder eine Geheimidentität besitzen.

Sei F die Menge der Superhelden, die fliegen können und C die Menge derer, die ein Cape tragen. Schließlich sei G die Menge der Helden, die eine Geheimidentität besitzen. Durch ausgiebiges Auswerten seiner Liste hat Jeff die folgende Informationen zusammengetragen:

$$|F| = 28, \quad |C| = 25, \quad |G| = 28, \quad |F \cap C| = 15, \quad |F \cap G| = 17, \quad |C \cap G| = 16, \quad |F \cap C \cap G| = 9$$

(a) Wie viele Superhelden stehen auf Jeffs Liste?
D.h. berechnen Sie $|F \cup C \cup G|$.

(b) Wie viele von Jeffs Lieblingssuperhelden haben genau zwei der Eigenschaften?
D.h. berechnen Sie $|((C \cap G) \cup (C \cap F) \cup (G \cap F)) \setminus (C \cap G \cap F)|$.

(c) Jeff möchte seine Sammlung an Actionfiguren vergrößern. Dazu will er eine Figur von jedem Superheld, der fliegen kann, sowie von jedem Superhelden, der ein Cape trägt aber keine Geheimidentität besitzt. Wie viele Figuren muss Jeff kaufen?
D.h. berechnen Sie $|F \cup (C \setminus G)|$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst anhand von Venn-Diagrammen, wie man die Kardinalitäten der Mengen berechnen kann.