

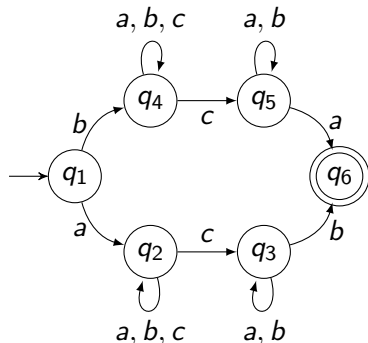
Automaten

Help-Desk Diskrete Modellierung

21. Februar 2013

Aufgabe 5 (a)

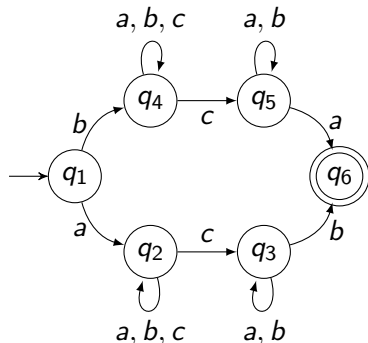
Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.



Welche der folgenden Wörter werden von A akzeptiert, welche nicht?

Aufgabe 5 (a)

Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

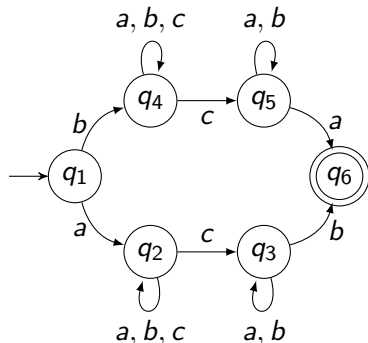


Welche der folgenden Wörter werden von A akzeptiert, welche nicht?

(i) *abc**c**cbaa*

Aufgabe 5 (a)

Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

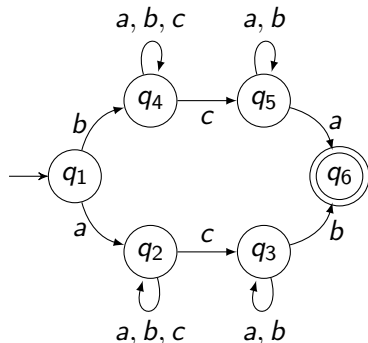


Welche der folgenden Wörter werden von A akzeptiert, welche nicht?

- (i) $aabccbaa$
- (ii) $aabbcc$

Aufgabe 5 (a)

Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.



Welche der folgenden Wörter werden von A akzeptiert, welche nicht?

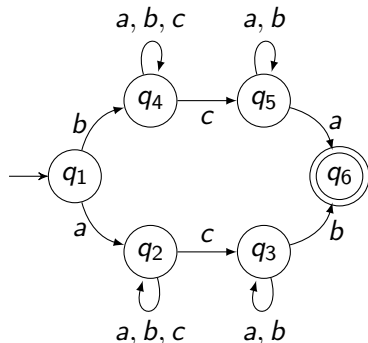
(i) $aabccbaa$

(iii) $acbacb$

(ii) $aabbcc$

Aufgabe 5 (a)

Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

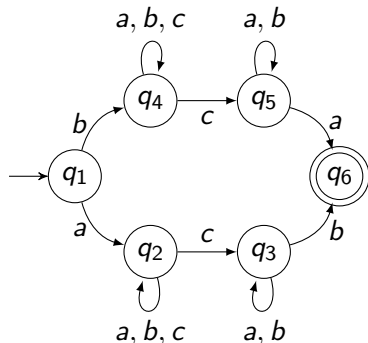


Welche der folgenden Wörter werden von A akzeptiert, welche nicht?

- (i) $aabccbaa$
- (ii) $aabbcc$
- (iii) $acbacb$
- (iv) $bcaaca$

Aufgabe 5 (a)

Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.



Welche der folgenden Wörter werden von A akzeptiert, welche nicht?

(i) *aabccbaa*

(iii) *acbacb*

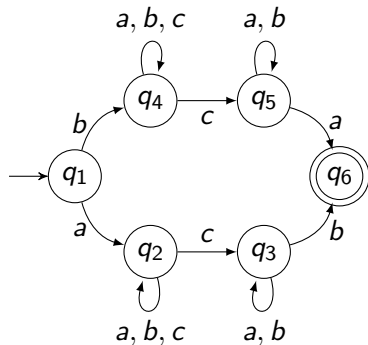
(v) *abbcacb*

(ii) *aabbcc*

(iv) *bcaaca*

Aufgabe 5 (a)

Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.



Welche der folgenden Wörter werden von A akzeptiert, welche nicht?

(i) $aabccbaa$

(iii) $acbacb$

(v) $abbcxcb$

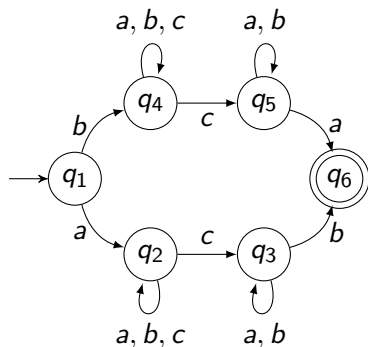
(ii) $aabbcc$

(iv) $bcaaca$

(vi) $baaaccb$

Aufgabe 5 (b) (c) (d)

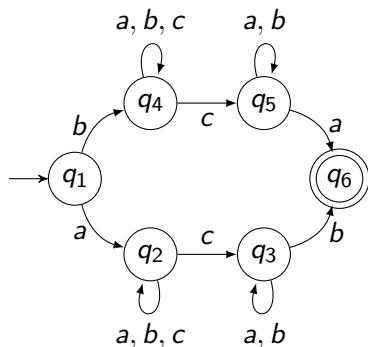
Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.



(b) Geben Sie die zwei kürzesten Wörter an, die A akzeptiert.

Aufgabe 5 (b) (c) (d)

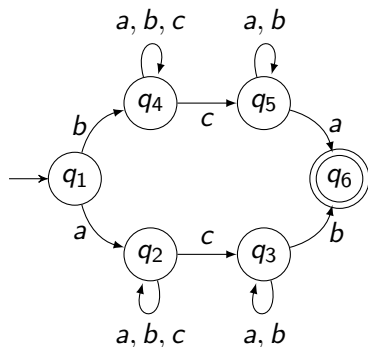
Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.



- (b) Geben Sie die zwei kürzesten Wörter an, die A akzeptiert.
- (c) Geben Sie eine (mathematische oder umgangssprachliche) Beschreibung der Sprache $L(A)$ an, die vom Automaten A akzeptiert wird.

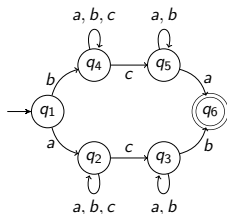
Aufgabe 5 (b) (c) (d)

Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.



- (b) Geben Sie die zwei kürzesten Wörter an, die A akzeptiert.
- (c) Geben Sie eine (mathematische oder umgangssprachliche) Beschreibung der Sprache $L(A)$ an, die vom Automaten A akzeptiert wird.
- (d) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $L(R) = L(A)$.

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

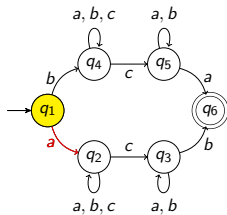


Ausgangsautomat:



- $\{q_1\}$

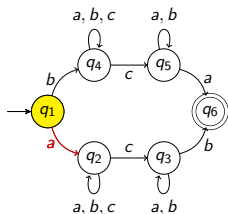
Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



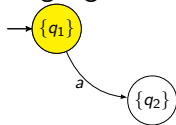
Ausgangsautomat:



Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

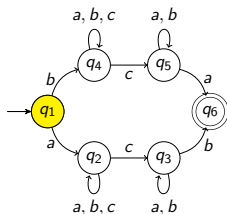


Ausgangsautomat:

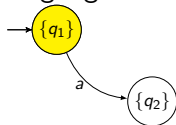


- {q2}

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

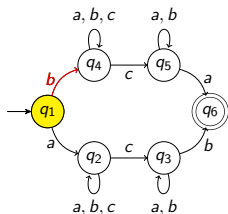


Ausgangsautomat:

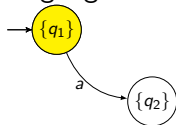


- {q2}

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

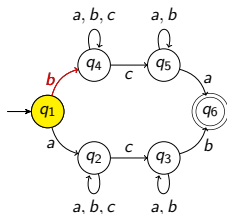


Ausgangsautomat:

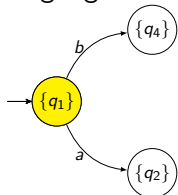


- $\{q_2\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

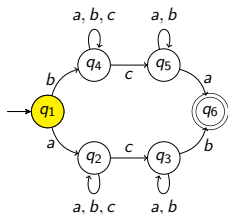


Ausgangsautomat:

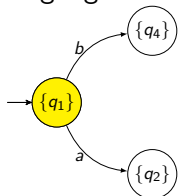


- $\{q_2\}$
- $\{q_4\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

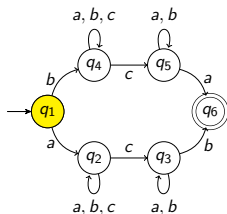


Ausgangsautomat:

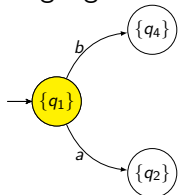


- {q2}
- {q4}

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

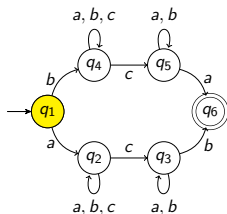


Ausgangsautomat:

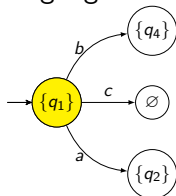


- {q2}
- {q4}

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

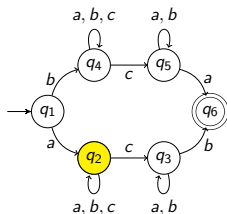


Ausgangsautomat:

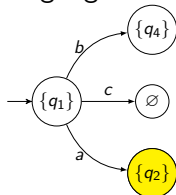


- $\{q_2\}$
- $\{q_4\}$
- \emptyset

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

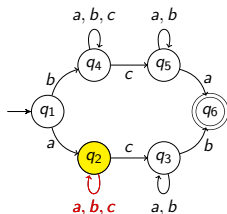


Ausgangsautomat:

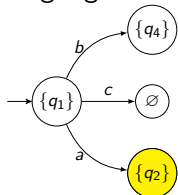


- $\{q_2\}$
- $\{q_4\}$
- \emptyset

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

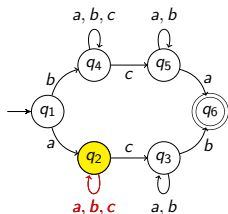


Ausgangsautomat:

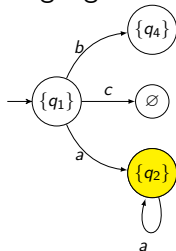


- {q4}
- ∅

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

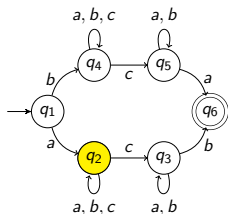


Ausgangsautomat:

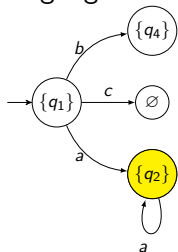


- {q4}
- ∅

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

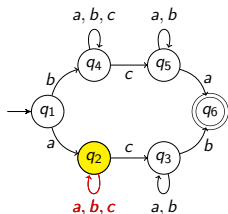


Ausgangsautomat:

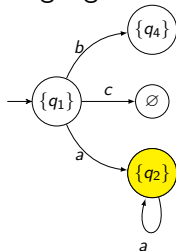


- {q4}
- ∅

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

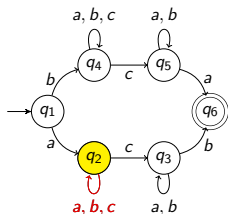


Ausgangsautomat:

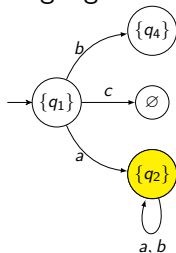


- {q4}
- ∅

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

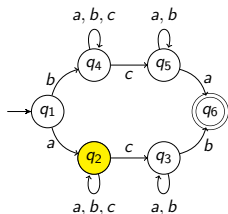


Ausgangsautomat:

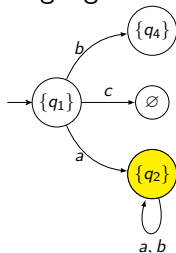


- {q4}
- ∅

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

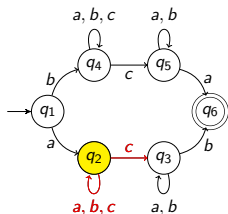


Ausgangsautomat:

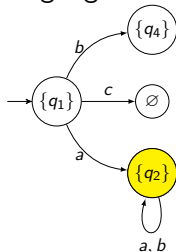


- {q4}
- ∅

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

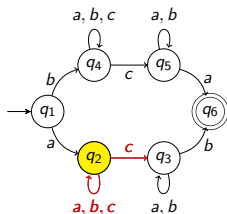


Ausgangsautomat:

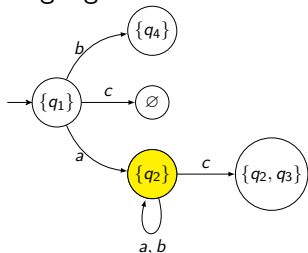


- {q4}
- ∅

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

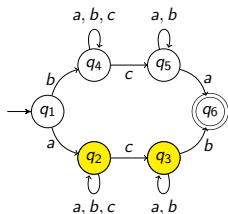


Ausgangsautomat:

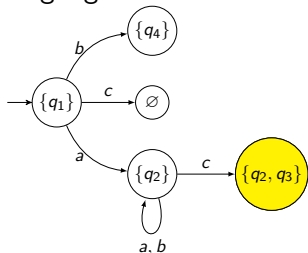


- $\{q_4\}$
- \emptyset
- $\{q_2, q_3\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

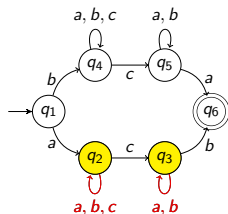


Ausgangsautomat:

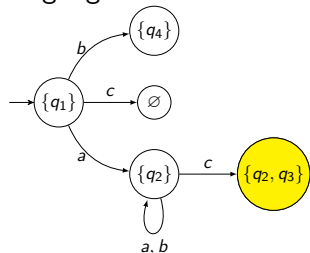


- $\{q_4\}$
- \emptyset
- $\{q_2, q_3\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

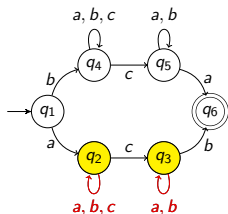


Ausgangsautomat:

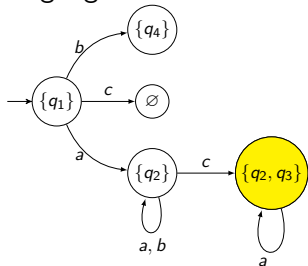


- {q4}
- ∅

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

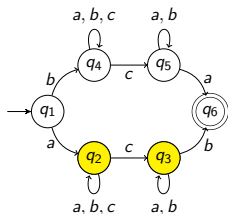


Ausgangsautomat:

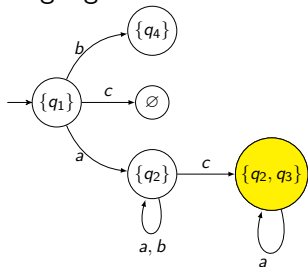


- {q4}
- ∅

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

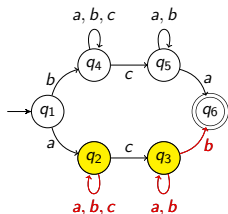


Ausgangsautomat:

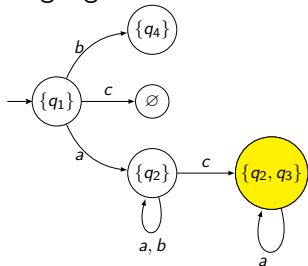


- {q4}
- ∅

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

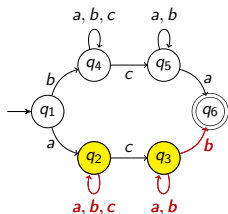


Ausgangsautomat:

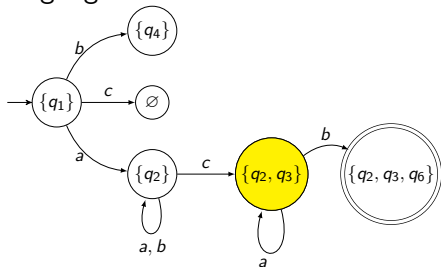


- $\{q_4\}$
- \emptyset

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



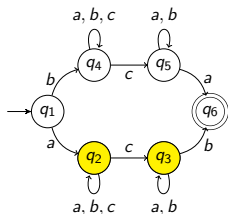
Ausgangsautomat:



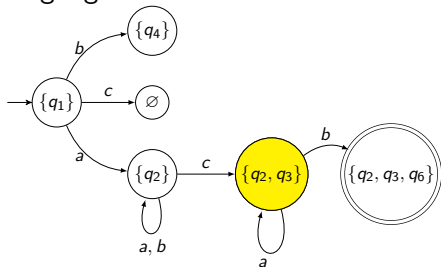
- {q4}
- ∅

- {q2, q3, q6}

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



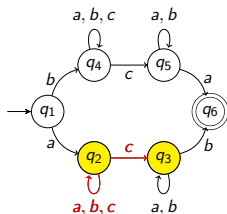
Ausgangsautomat:



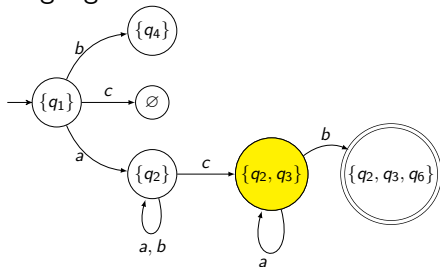
- $\{q_4\}$
- \emptyset

- $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:

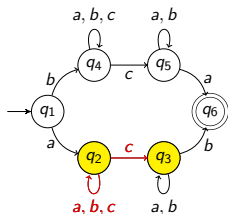


• $\{q_4\}$

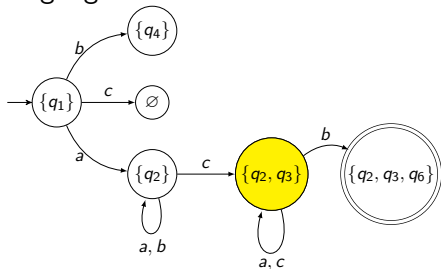
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:

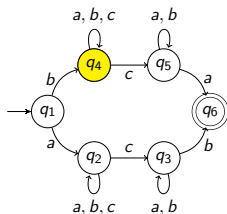


• $\{q_4\}$

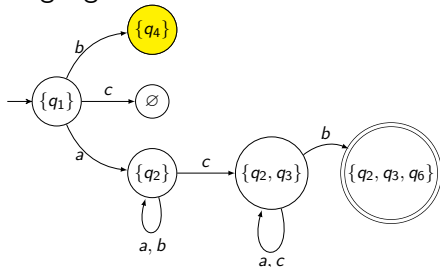
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:

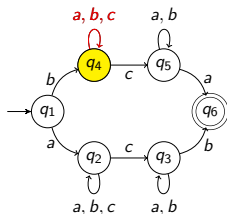


• {q4}

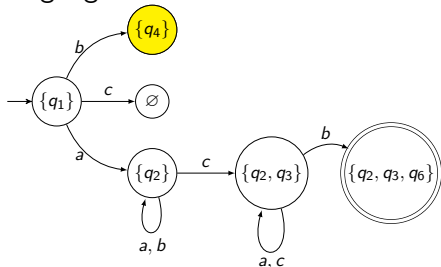
• ∅

• {q2, q3, q6}

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



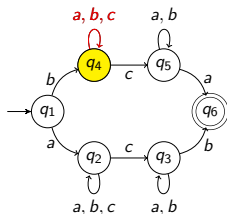
Ausgangsautomat:



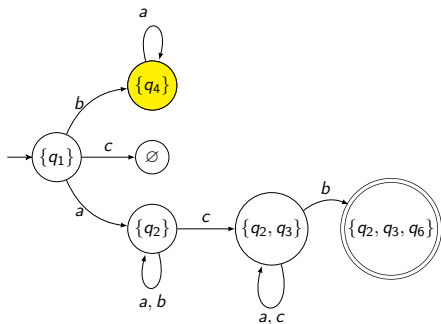
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



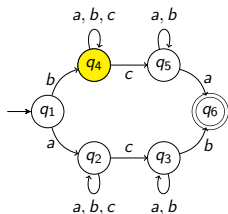
Ausgangsautomat:



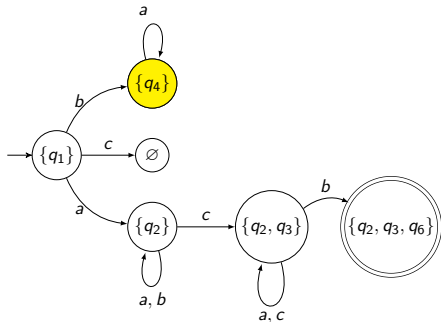
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



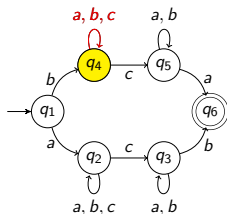
Ausgangsautomat:



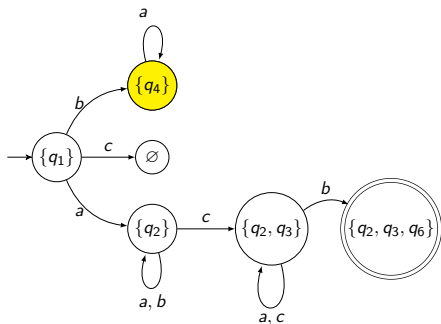
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



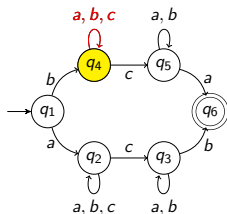
Ausgangsautomat:



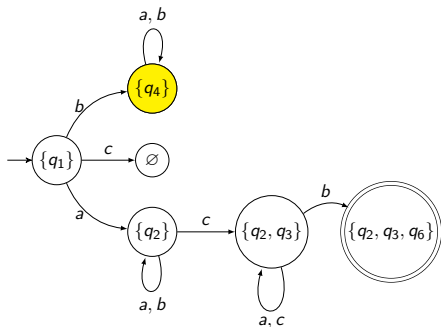
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



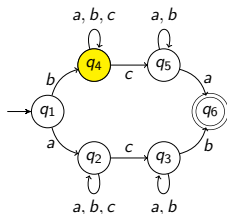
Ausgangsautomat:



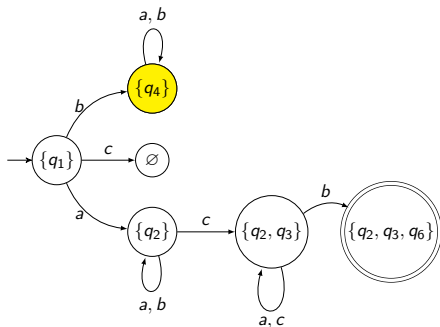
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



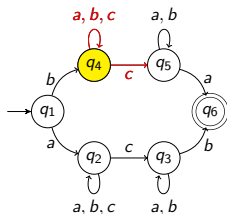
Ausgangsautomat:



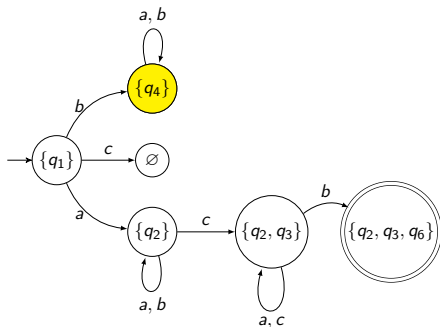
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



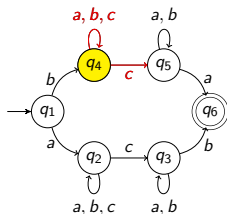
Ausgangsautomat:



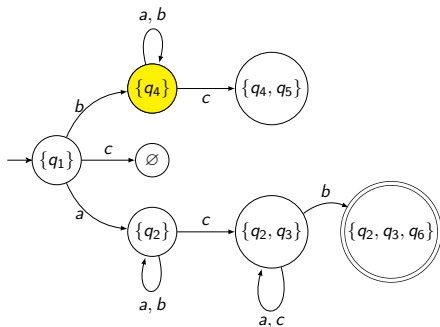
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

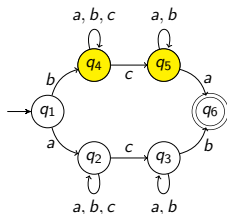


Ausgangsautomat:

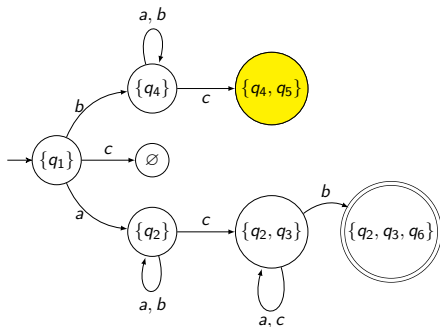


- \emptyset
- $\{q_4, q_5\}$
- $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

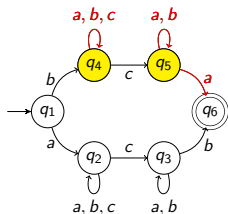


Ausgangsautomat:

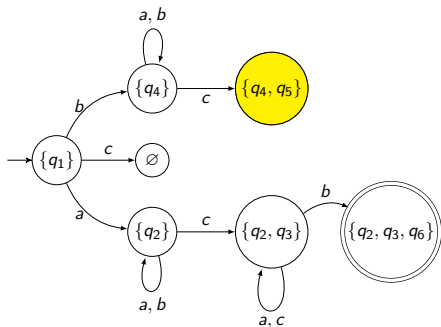


- \emptyset
- $\{q_4, q_5\}$
- $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



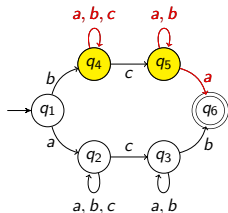
Ausgangsautomat:



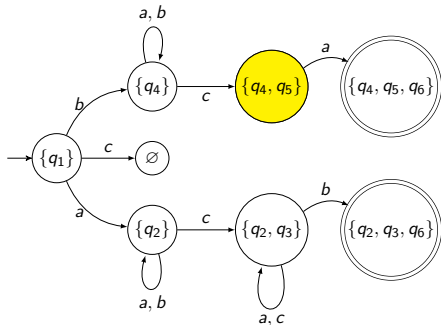
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:

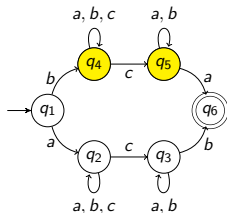


- \emptyset

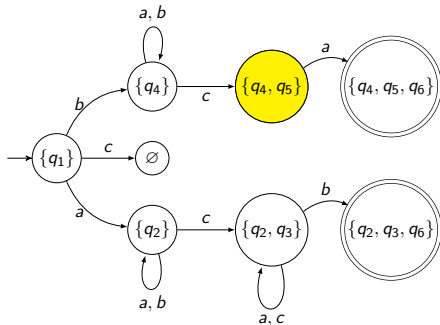
- $\{q_2, q_3, q_6\}$

- $\{q_4, q_5, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:

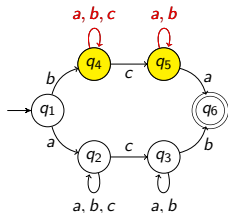


- \emptyset

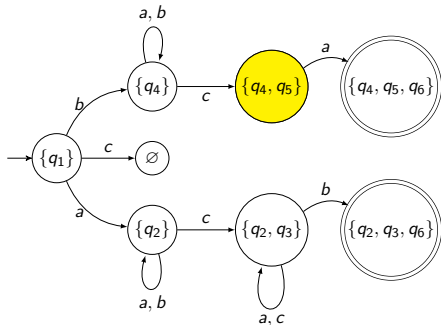
- $\{q_2, q_3, q_6\}$

- $\{q_4, q_5, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:

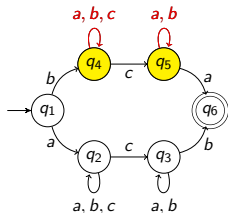


- \emptyset

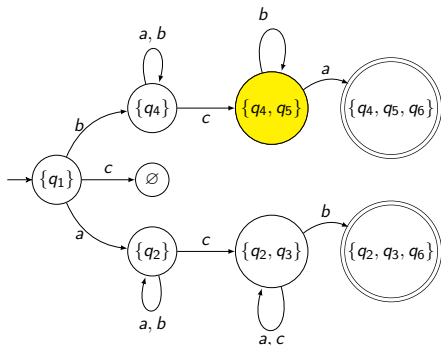
- $\{q_2, q_3, q_6\}$

- $\{q_4, q_5, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:

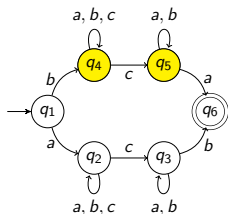


• \emptyset

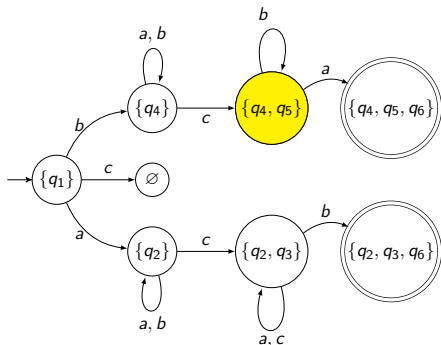
• $\{q_2, q_3, q_6\}$

• $\{q_4, q_5, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:

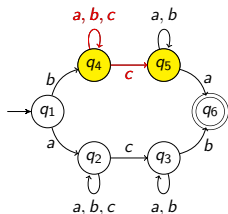


• \emptyset

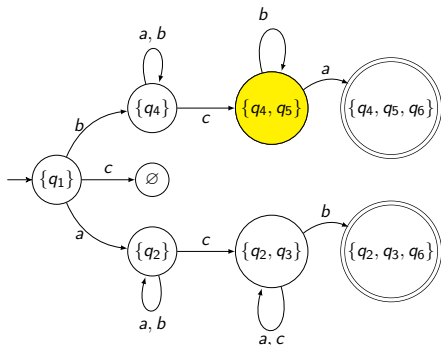
• $\{q_2, q_3, q_6\}$

• $\{q_4, q_5, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:

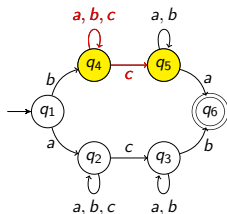


• \emptyset

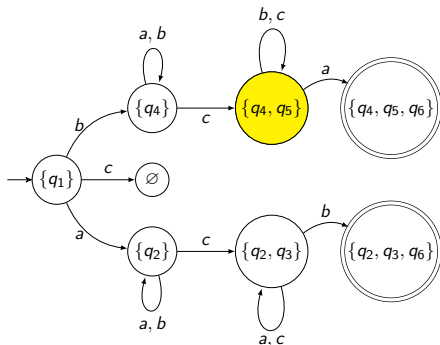
• $\{q_2, q_3, q_6\}$

• $\{q_4, q_5, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:

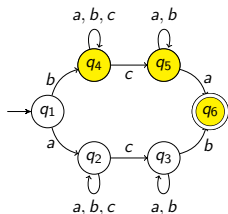


• \emptyset

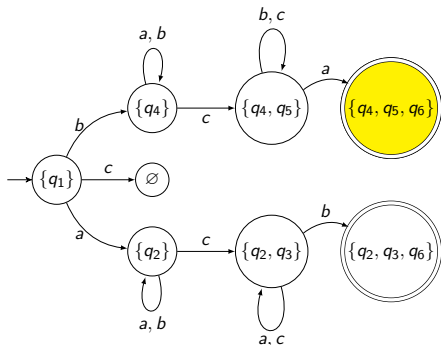
• $\{q_2, q_3, q_6\}$

• $\{q_4, q_5, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:

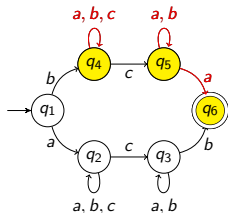


• \emptyset

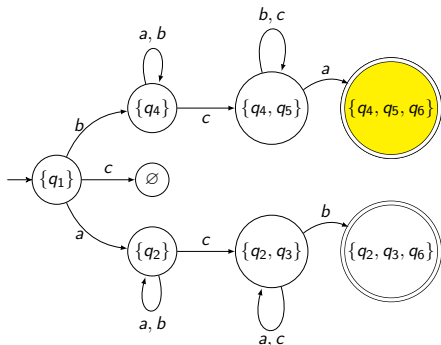
• $\{q_2, q_3, q_6\}$

• $\{q_4, q_5, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



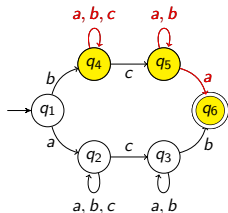
Ausgangsautomat:



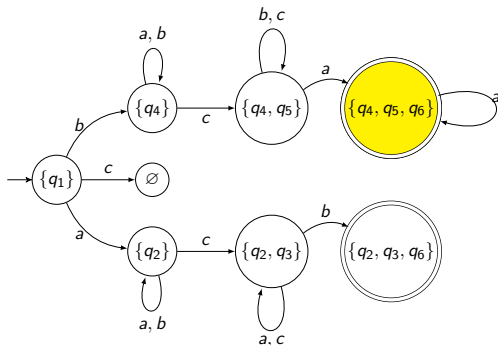
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



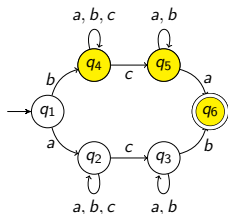
Ausgangsautomat:



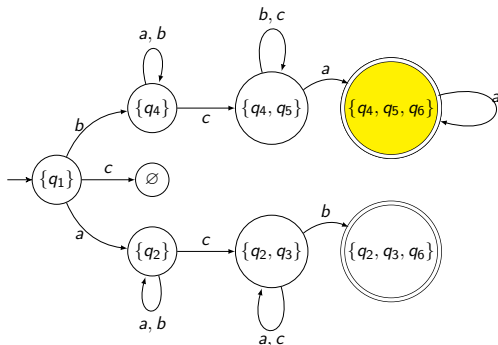
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



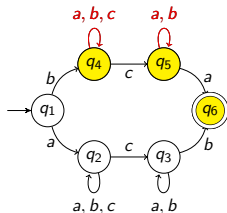
Ausgangsautomat:



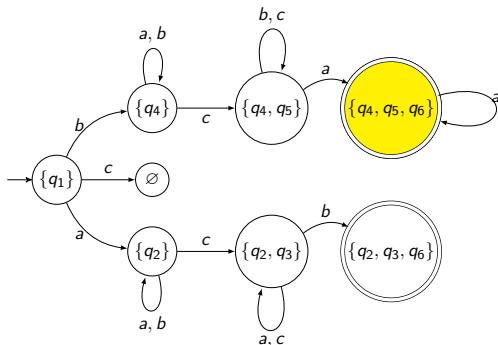
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



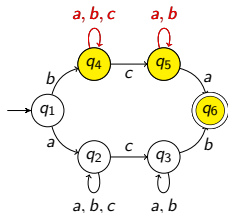
Ausgangsautomat:



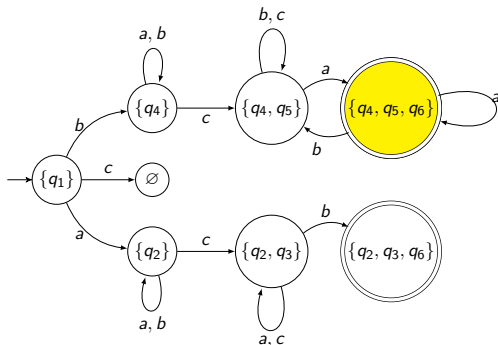
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



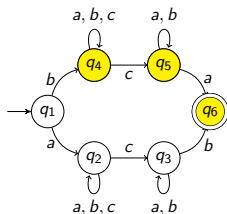
Ausgangsautomat:



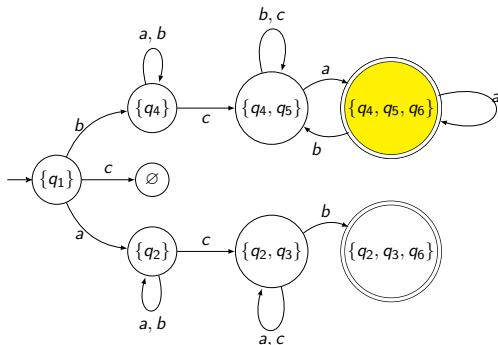
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



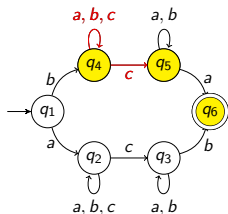
Ausgangsautomat:



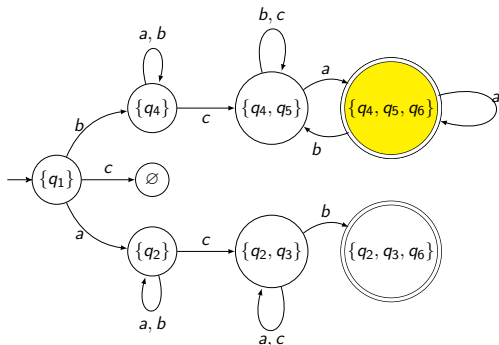
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



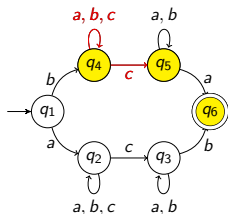
Ausgangsautomat:



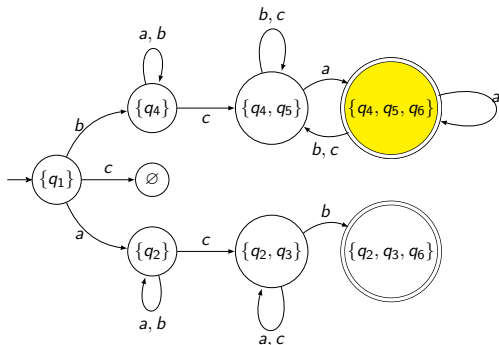
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



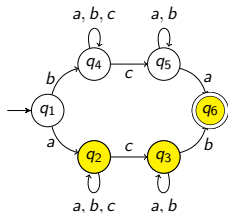
Ausgangsautomat:



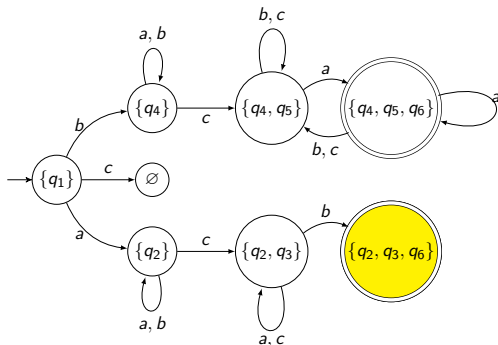
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



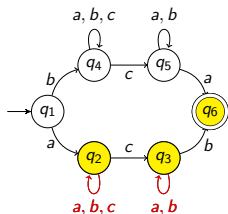
Ausgangsautomat:



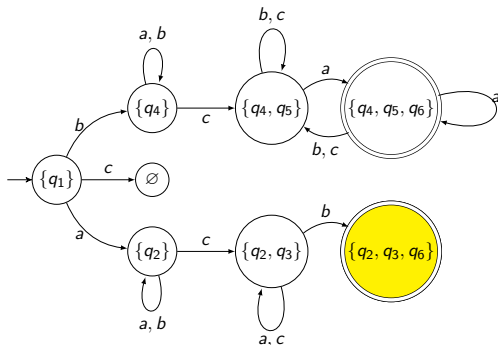
• \emptyset

• $\{q_2, q_3, q_6\}$

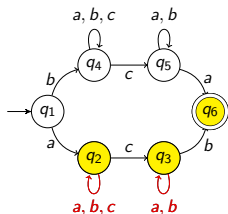
Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



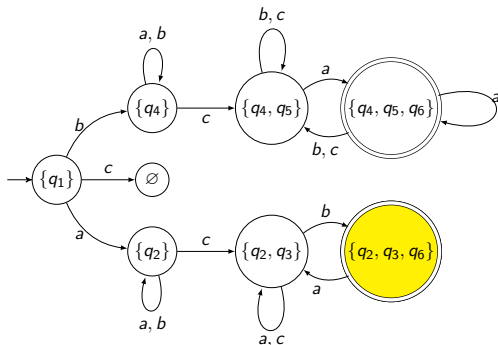
Ausgangsautomat:



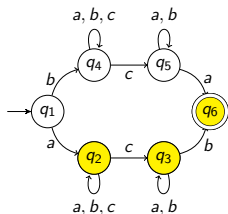
Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



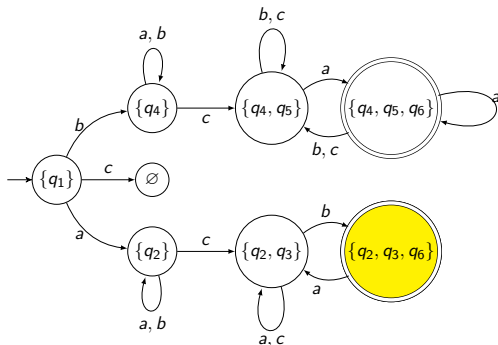
Ausgangsautomat:



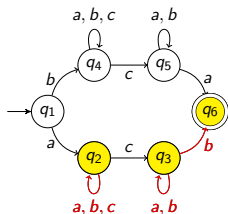
Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



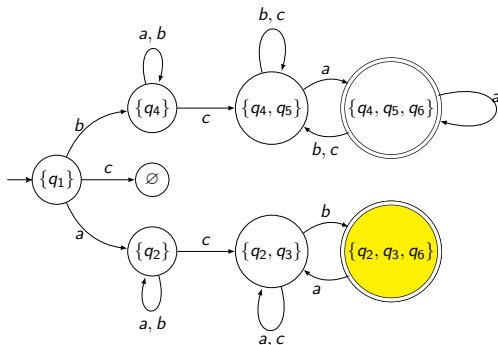
Ausgangsautomat:



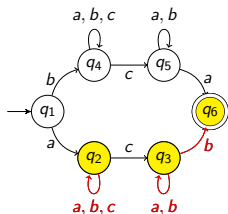
Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



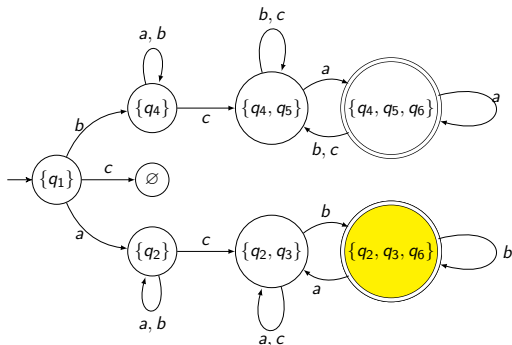
Ausgangsautomat:



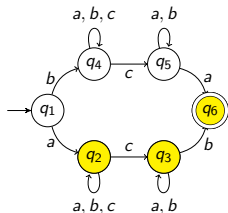
Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



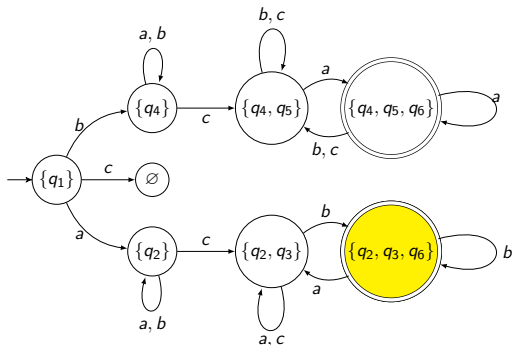
Ausgangsautomat:



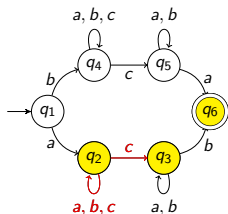
Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



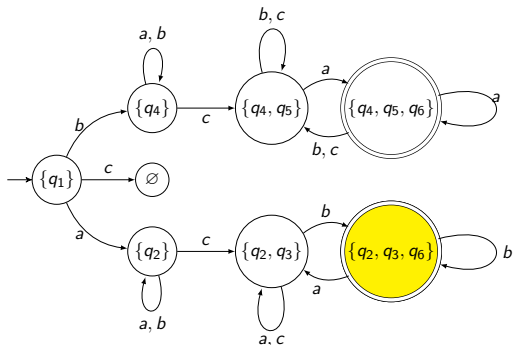
Ausgangsautomat:



Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

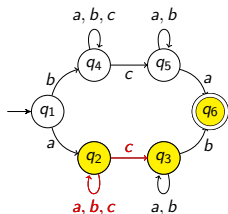


Ausgangsautomat:

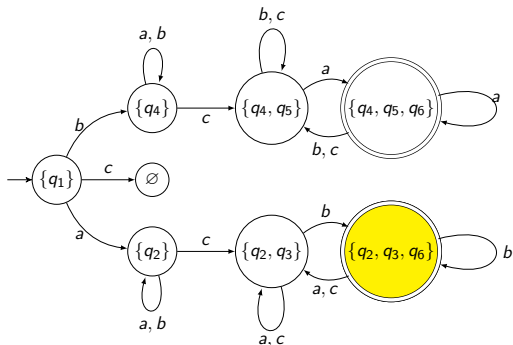


• ∅

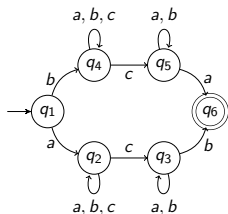
Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



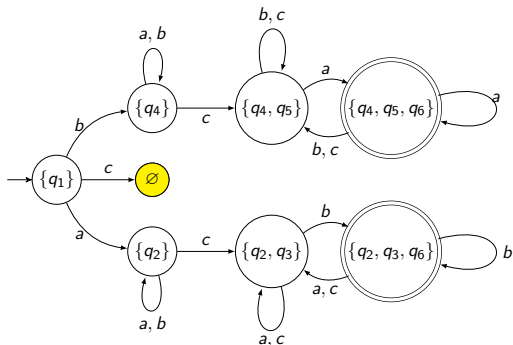
Ausgangsautomat:



Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)

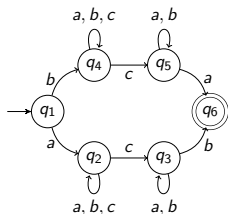


Ausgangsautomat:

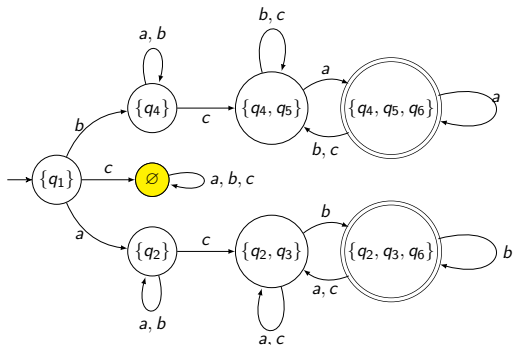


• ∅

Aufgabe 5 (e) (Potenzmengenkonstruktion)



Ausgangsautomat:



Welche der folgenden Sprachen sind regulär, welche nicht? Beweisen Sie die Korrektheit.

(i) $L_1 = \{a^i a^i : i \in \mathbb{N}\}$

(ii) $L_2 = \{a^i b a^i : i \in \mathbb{N}\}$ (*Beweis: Übung*)

(iii) $L_3 = \{a^i a a^i : i \in \mathbb{N}\}$

(iv) $L_4 = \{b a^i b a^i : i \in \mathbb{N}\}$

Beh: $L_4 = \{ba^i ba^i : i \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär

Die Idee vom Pumping-Lemma Wir gehen Schrittweise vor.

- Wir wählen eine Pumping-Lemma Konstante $n_{L_4} \in \mathbb{N}$.
- Wir wählen ein Wort aus L_4 , das von der Konstante n_{L_4} abhängig ist. (z.B. $z := ba^{n_{L_4}} ba^{n_{L_4}}$).
- Beachte: Für das Wort muss gelten $|z| \geq n_{L_4}$ (also es hat mindestens die Länge n_{L_4}).
- Wir nehmen eine Schere und schneiden das Wort in Teilworte $u, v, w \in \{a, b\}^*$ nach den folgenden Regeln:
 - (1) $z = uvw$ (d.h. wir haben am Ende 3 Teile) Beachte, dass $u = \varepsilon$ und $w = \varepsilon$ sein kann.
 - (2) $|uv| \leq n_{L_4}$ (d.h. uv haben zusammen die Länge n_{L_4} . Nach unserem Beispiel besteht uv also nur aus einem b und eventuell aus a 's).
 - (3) $|v| \geq 1$ (d.h. v besteht mindestens aus einem Buchstaben und es gilt insbesondere $v \neq \varepsilon$).

Skizze dazu siehe Tafel

Beh: $L_4 = \{ba^i ba^i : i \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär

Beweis: Durch Widerspruch. Angenommen, $L_4 = \{ba^i ba^i : i \in \mathbb{N}\}$ ist regulär. Dann sei $n_{L_4} \in \mathbb{N}_{>0}$ die gemäß dem Pumping-Lemma gewählte Pumpingkonstante. Betrachte das Wort $z := ba^{n_{L_4}} ba^{n_{L_4}}$. Klar: $z \in L$ und $|z| \geq n_{L_4}$. Gemäß dem Pumping-Lemma gibt es eine Zerlegung von z in Worte $u, v, w \in \{a, b\}^*$, so dass

$$(1) \quad z = uvw$$

$$(3) \quad |v| \geq 1$$

$$(2) \quad |uv| \leq n_{L_4}$$

$$(4) \quad \text{f.a. } i \in \mathbb{N} \text{ gilt: } uv^i w \in L.$$

Wie unterscheiden zwei Fälle:

- 1 v enthält (genau ein) b
- 2 v enthält kein b

Weiteres siehe Tafel

Wo lauern die Gefahren?

- Wir wissen **nicht genau**, wie die Teilworte u, v, w aussehen (zum Beispiel können wir **nicht** festlegen, dass v immer genau 3 a's besitzt oder dass $u = \varepsilon$).
- Beachte, dass das Wort lang genug ist, um Fallunterscheidungen zu vermeiden. (Man könnte auch in unserem Beispiel $z := ba^{\lfloor \frac{nL_4}{2} \rfloor} ba^{\lfloor \frac{nL_4}{2} \rfloor}$ wählen. Dann gibt es aber viele Fallunterscheidungen.)
- Achte darauf, ob Fallunterscheidungen nötig sind. (das ist meist der Fall, falls uv aus mehreren Buchstaben bestehen kann. (zum Beispiel auf Übungsblatt 13 Aufgabe 3 (b)))
- Mit dem Pumping-Lemma können wir **nicht** zeigen, dass eine Sprache regulär ist.