

Aussagenlogik

Help-Desk Diskrete Modellierung

February 19, 2013

Aufgabe 1 a)

Von Menschen, die auf den Mond geflogen sind, kann man getrost sagen, sie seien berühmt. Lady Gaga ist unseres Wissens nicht auf den Mond geflogen und dennoch gibt es Menschen, die behaupten, sie sei berühmt. Untersuchen Sie im Folgenden, ob hier ein logischer Widerspruch vorliegt. Stellen Sie dazu eine aussagenlogische Formel φ auf, die aussagt: Falls Lady Gaga zum Mond geflogen ist, ist sie berühmt und außerdem soll gleichzeitig gelten, dass sie nicht zum Mond geflogen ist und dass sie berühmt ist. Benutzen Sie dazu die atomaren Aussagen M (Lady Gaga ist zum Mond geflogen) und B (Lady Gaga ist berühmt). Untersuchen Sie nun, ob φ einen logischen Widerspruch ausdrückt oder ob Situationen existieren, in denen die Formel eine wahre Aussage repräsentiert.

Aufgabe 1 b)

- I: Wenn die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden, müssen die Banken stärker kontrolliert werden.
 - II: Wenn Staatseigentum verkauft wird oder die Steuern gesenkt werden, dann dürfen die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden.
 - III: Die Banken werden genau dann stärker kontrolliert, wenn die Ausgaben für Bildung erhöht werden und die Steuern nicht gesenkt werden.
- (i) Geben Sie für jede der Anforderungen I, II und III eine aussagenlogische Formel an, die die jeweilige Anforderung widerspiegelt. Benutzen Sie dafür die atomaren Aussagen S (die Steuern werden gesenkt), B (die Ausgaben für Bildung werden erhöht), V (Staatseigentum wird verkauft) und K (die Banken werden stärker kontrolliert.)

Aufgabe 1 b)

- I: Wenn die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden, müssen die Banken stärker kontrolliert werden.
 - II: Wenn Staatseigentum verkauft wird oder die Steuern gesenkt werden, dann dürfen die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden.
 - III: Die Banken werden genau dann stärker kontrolliert, wenn die Ausgaben für Bildung erhöht werden und die Steuern nicht gesenkt werden.
- (ii) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel φ auf, die die atomaren Aussagen S , B , V und K benutzt und die widerspiegelt, dass alle Anforderungen gleichzeitig erfüllt sein müssen.

Aufgabe 1 b)

- I: Wenn die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden, müssen die Banken stärker kontrolliert werden.
 - II: Wenn Staatseigentum verkauft wird oder die Steuern gesenkt werden, dann dürfen die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden.
 - III: Die Banken werden genau dann stärker kontrolliert, wenn die Ausgaben für Bildung erhöht werden und die Steuern nicht gesenkt werden.
- (iii) Geben Sie für Ihre Formel φ aus (??) eine Belegung an, die besagt, dass die Steuern gesenkt werden, die Ausgaben für Bildung sich nicht erhöhen, Staatseigentum verkauft wird und die Banken stärker kontrolliert werden. Erfüllt diese Belegung die Formel φ ?

Aufgabe 1 b)

- I: Wenn die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden, müssen die Banken stärker kontrolliert werden.
 - II: Wenn Staatseigentum verkauft wird oder die Steuern gesenkt werden, dann dürfen die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden.
 - III: Die Banken werden genau dann stärker kontrolliert, wenn die Ausgaben für Bildung erhöht werden und die Steuern nicht gesenkt werden.
- (iv) Welche Maßnahmen genau muss König Alfons der Viertel-vor-Zwölfte aus den Möglichkeiten Steuersenkung, Bildungsausgabenerhöhung, Verkauf des Staatseigentums und Verstärkung der Bankenkontrolle treffen und welche muss er unterlassen, um allen Anforderungen der EZB gerecht zu werden? Überlegen Sie sich dazu anhand einer Wahrheitstafel, welche Belegungen die Formel φ aus (??) erfüllen.

Aufgabe 1 c) NNF? DNF? KNF?

Welche der folgenden Formeln sind in Negationsnormalform (NNF), disjunktiver Normalform (DNF) und/oder konjunktiver Normalform (KNF)?

① $\varphi := \left((\neg X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_3)) \vee \neg X_2 \right)$

Aufgabe 1 c) NNF? DNF? KNF?

Welche der folgenden Formeln sind in Negationsnormalform (NNF), disjunktiver Normalform (DNF) und/oder konjunktiver Normalform (KNF)?

$$\textcircled{1} \quad \varphi := \left((\neg X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_3)) \vee \neg X_2 \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \psi := \left((X_1 \vee \neg X_2) \wedge ((\neg X_1 \vee X_3) \vee X_4) \right)$$

Aufgabe 1 c) NNF? DNF? KNF?

Welche der folgenden Formeln sind in Negationsnormalform (NNF), disjunktiver Normalform (DNF) und/oder konjunktiver Normalform (KNF)?

$$\textcircled{1} \quad \varphi := \left((\neg X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_3)) \vee \neg X_2 \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \psi := \left((X_1 \vee \neg X_2) \wedge ((\neg X_1 \vee X_3) \vee X_4) \right)$$

$$\textcircled{3} \quad \chi := X_1$$

Aufgabe 1 e)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

- 1 Genau dann wenn eine aussagenlogische Formel φ unerfüllbar ist, dann ist $\neg\varphi$ allgemeingültig.

Aufgabe 1 e)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

- 1 Genau dann wenn eine aussagenlogische Formel φ unerfüllbar ist, dann ist $\neg\varphi$ allgemeingültig.
- 2 Es gibt eine aussagenlogische Formel φ , so dass für alle zu φ passenden Belegungen \mathcal{B} gilt $\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{B}} = 1$.

Aufgabe 1 e)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

- 1 Genau dann wenn eine aussagenlogische Formel φ unerfüllbar ist, dann ist $\neg\varphi$ allgemeingültig.
- 2 Es gibt eine aussagenlogische Formel φ , so dass für alle zu φ passenden Belegungen \mathcal{B} gilt $\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{B}} = 1$.
- 3 Falls eine aussagenlogische Formel φ erfüllbar und eine aussagenlogische Formel ψ unerfüllbar ist, dann ist $(\varphi \vee \psi)$ unerfüllbar.

Aufgabe 1 e)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

- 1 Genau dann wenn eine aussagenlogische Formel φ unerfüllbar ist, dann ist $\neg\varphi$ allgemeingültig.
- 2 Es gibt eine aussagenlogische Formel φ , so dass für alle zu φ passenden Belegungen \mathcal{B} gilt $\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{B}} = 1$.
- 3 Falls eine aussagenlogische Formel φ erfüllbar und eine aussagenlogische Formel ψ unerfüllbar ist, dann ist $(\varphi \vee \psi)$ unerfüllbar.
- 4 Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn gilt $\mathbf{1} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Aufgabe 1 e)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

- 1 Genau dann wenn eine aussagenlogische Formel φ unerfüllbar ist, dann ist $\neg\varphi$ allgemeingültig.
- 2 Es gibt eine aussagenlogische Formel φ , so dass für alle zu φ passenden Belegungen \mathcal{B} gilt $\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathcal{B}} = 1$.
- 3 Falls eine aussagenlogische Formel φ erfüllbar und eine aussagenlogische Formel ψ unerfüllbar ist, dann ist $(\varphi \vee \psi)$ unerfüllbar.
- 4 Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn gilt $\mathbf{1} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$.
- 5 Zu jeder aussagenlogischen Formel φ existiert eine aussagenlogische Formel ψ , so dass φ allgemeingültig ist, genau dann wenn $(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi))$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 1 f)

Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie außerdem folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

$$\textcircled{1} \varphi_1 = ((X_1 \vee (X_2 \vee X_3)) \rightarrow (\neg X_1 \wedge (\neg X_2 \wedge \neg X_3)))$$

Aufgabe 1 f)

Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie außerdem folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

$$\textcircled{1} \varphi_1 = ((X_1 \vee (X_2 \vee X_3)) \rightarrow (\neg X_1 \wedge (\neg X_2 \wedge \neg X_3)))$$

$$\textcircled{2} \varphi_2 = ((X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3)) \rightarrow (\neg X_1 \vee (\neg X_2 \vee \neg X_3)))$$

Aufgabe 1 f)

Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie außerdem folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

$$\textcircled{1} \varphi_1 = ((X_1 \vee (X_2 \vee X_3)) \rightarrow (\neg X_1 \wedge (\neg X_2 \wedge \neg X_3)))$$

$$\textcircled{2} \varphi_2 = ((X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3)) \rightarrow (\neg X_1 \vee (\neg X_2 \vee \neg X_3)))$$

$$\textcircled{3} \varphi_3 := \left(((X_1 \vee X_2) \leftrightarrow X_3) \wedge (X_1 \wedge \neg X_3) \right)$$

Aufgabe 1 f)

Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie außerdem folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

$$\textcircled{1} \varphi_1 = ((X_1 \vee (X_2 \vee X_3)) \rightarrow (\neg X_1 \wedge (\neg X_2 \wedge \neg X_3)))$$

$$\textcircled{2} \varphi_2 = ((X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3)) \rightarrow (\neg X_1 \vee (\neg X_2 \vee \neg X_3)))$$

$$\textcircled{3} \varphi_3 := \left(((X_1 \vee X_2) \leftrightarrow X_3) \wedge (X_1 \wedge \neg X_3) \right)$$

$$\textcircled{4} \varphi_4 := \left(\left(X_1 \wedge (X_1 \rightarrow (X_2 \vee X_3)) \right) \rightarrow X_3 \right)$$