Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

9. Februar 2012

Logik in der Informatik

Wintersemester 2011 / 2012

Übungsblatt 14

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass in Definition 10.10 ("Repräsentierbarkeit einer Funktion") die Bedingung (1.2) bereits aus den Bedingungen (1.1) und (2) folgt, sofern $T \supseteq Q$ ist. D.h.:

Sei $T \supseteq Q$ eine Menge von FO[σ_{ar}]-Sätzen, sei $k \geqslant 1$, sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion, und sei $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ eine FO[σ_{ar}]-Formel, so dass gilt:

(1.1) Für alle $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \dots, m_k) = n$ gilt: $T \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

(2) Für alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$T \models \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_1) \land \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_2)\big) \to y_1{=}y_2 \Big).$$

Zeigen Sie, dass dann auch Folgendes gilt:

(1.2) Für alle $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \dots, m_k) \neq n$ gilt: $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$.

Frage: An welcher Stelle benutzt Ihr Beweis, dass $T \supseteq Q$ ist?

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Warum zeigt der Beweis von Lemma 10.12 (a) nicht sogar, dass jede Σ_1-definierbare Funktion in Q repräsentierbar ist?

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass es eine Σ_1-Formel φ gibt, so dass es keine zu $\neg\varphi$ äquivalente Σ_1-Formel gibt.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Viel Spaß in den Semesterferien!