Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

19. Januar 2012

# Logik in der Informatik

Wintersemester 2011 / 2012

## Übungsblatt 11

*Zu bearbeiten bis Donnerstag, 26. Januar 2012*

**Aufgabe 1:** (25 Punkte)

Sei $\mathfrak{B}$ ein Nichtstandard-Modell der Arithmetik.
Zeigen Sie: Zwischen je zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ in $\mathfrak{B}$ liegt eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$.

**Aufgabe 2:** (30 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$, und sei $\mathfrak{B}$ die $\{\leqslant\}$-Struktur mit Universum

$$B \;:=\; \big(\{0\} \times \mathbb{N}\big) \cup \big(\{1\} \times \mathbb{Z}\big)$$

und Relation

$$\leqslant^{\mathfrak{B}} := \; \{\big((i,j),(i',j')\big) \in B \times B \;:\; i < i' \text{ oder } \big(i = i' \text{ und } j \leqslant j'\big)\}.$$

Sind die Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.
*Hinweis:* Sie können Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele benutzen.

**Aufgabe 3:** (20 Punkte)

Berechnen Sie die Gödelnummern der $\sigma_{Ar}$-Terme $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$ und $\underline{3}$.

**Aufgabe 4:** (25 Punkte)

Beweisen Sie Behauptung 5 aus dem Beweis von Lemma 9.17, d.h. zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$g(y_1, y_2) \;:=\; \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + 1)(y_1 + y_2) + y_2 \;, \qquad \text{für alle } y_1, y_2 \in \mathbb{N},$$

bijektiv ist.