Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. November 2011

Logik in der Informatik

Wintersemester 2011 / 2012

Übungsblatt 2

Zu bearbeiten bis Donnerstag, 10. November 2011

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Es sei R ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 2-stelliges Funktionssymbol. Berechnen Sie

(a) $\big(f(v_0, v_1){=}v_2 \;\vee\; R(v_1, v_2)\big)\,\frac{f(v_1,v_0),\, f(v_4,v_1)}{v_0 \quad , \quad v_2}$

(b) $\forall v_0\big(\neg R(v_0, v_2) \;\wedge\; f(v_1, v_2){=}v_1\big)\,\frac{v_2,\, v_3}{v_1,\, v_2}$

(c) $\exists v_1\big(R(v_1, v_0) \;\rightarrow\; \forall v_2\, f(v_1, v_2){=}v_1\big)\,\frac{f(v_2,v_0),\, v_3}{v_1 \quad , v_2}$

(d) $\forall v_1\big(\neg R(v_0, v_1) \;\vee\; \exists v_0\, R(v_1, f(v_4, v_0))\big)\,\frac{f(v_1,v_2),\, v_0}{v_0 \quad , v_3}$

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Die Signatur σ bestehe aus einem 2-stelligen Relationssymbol E und einem 2-stelligen Funktionssymbol f. Betrachten Sie die FO[σ]-Formeln

(a) $\varphi_1 \;:=\; \forall v_0\, \forall v_1\, \big(E(v_0, v_1) \;\rightarrow\; \exists v_2(E(v_0, v_2) \wedge E(v_2, v_1))\big)$

(b) $\varphi_2 \;:=\; \forall v_0\, \forall v_1\, \big(E(v_0, v_1) \;\leftrightarrow\; E(f(v_0, v_0), f(v_1, v_1))\big)$

Geben Sie für jedes $i \in \{1, 2\}$ eine σ-Interpretation $\mathcal{I}_i$ und eine σ-Interpretation $\mathcal{J}_i$ an mit $\mathcal{I}_i \models \varphi_i$ und $\mathcal{J}_i \not\models \varphi_i$.

Aufgabe 3: (30 Punkte)

Entwickeln Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe einer beliebigen FO[σ]-Formel φ eine zu φ äquivalente Formel φ' mit $\mathit{frei}(\varphi') = \mathit{frei}(\varphi)$ in pränexer Normalform erzeugt.
Analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus (in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe φ).

Aufgabe 4: (30 Punkte)

Sei σ eine relationale Signatur.
Zeigen Sie, dass es für jede FO[σ]-Formel φ eine zu φ äquivalente FO[σ]-Formel $\tilde{\varphi}$ mit $\mathit{frei}(\tilde{\varphi}) = \mathit{frei}(\varphi)$ gibt, in der höchstens $\mathit{br}(\varphi)$ viele verschiedene Variablen vorkommen.