Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

1. Februar 2012

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 13

Abgabe: *bis 8. Februar 2012, 8.[15] Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(28 Punkte)**

(a) Gegeben seien die folgenden regulären Ausdrücke über dem Alphabet $A = \{a, b\}$

$R_1 = a(ba)^*ba$ $\quad$ $R_2 = a(b(a|b))^*$ $\quad$ $R_3 = (\varepsilon|aa|ab|ba)^*(a|b)$

(i) Gehören die folgenden Worte zur Sprache $L(R_1)$, $L(R_2)$ bzw. $L(R_3)$?

$w_1 = \varepsilon$ $\quad$ $w_2 = a$ $\quad$ $w_3 = aba$ $\quad$ $w_4 = abbab$

(ii) Geben Sie das kürzeste Wort w an, so dass $w \in L(R_2)$ und $w \notin L(R_3)$.

(iii) Beschreiben Sie die Sprachen $L(R_1) \setminus L(R_2)$ und $L(a|(b\varepsilon a)^*) \cap L(R_3)$ jeweils umgangssprachlich.

(iv) Geben Sie einen NFA mit möglichst wenigen Zuständen in graphischer Darstellung an, der die Sprache $L(R_3)$ akzeptiert.

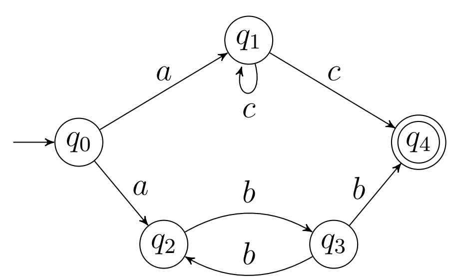
(b) Geben Sie für die folgenden Sprachen je einen möglichst kurzen regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

(i) $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* : |w| \neq 2\}$

(ii) $L_2 := \{w = w_0 w_1 w_2 \ldots \in \{a, b\}^* : \text{Falls } w_i = b \text{ so } w_{i+1} = a \text{ oder } w_{i+2} = a \text{ , } i \in \mathbb{N}\}$

(iii) $L_3 := \{w \in \{a, b\}^* : \text{der erste und der letzte Buchstabe von } w \text{ sind ungleich}\}$

(c) Betrachten Sie den abgebildeten NFA A über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.
Geben Sie einen DFA A' in graphischer Darstellung an, mit $L(A') = L(A)$. Wandeln sie dazu den NFA A mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion in einen DFA A' um. Berücksichtigen Sie dabei nur solche Zustände von A', die vom Startzustand $q'_0 := \{q_0\}$ aus erreicht werden können.



Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Welche der folgenden Sprachen sind regulär, welche nicht? Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Antwort jeweils mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder durch die Angabe eines endl. Automaten.

(a) $L_1 := \{a^i a^i : i \in \mathbb{N}\}$

(b) $L_2 := \{a^i a a^i : i \in \mathbb{N}\}$

(c) $L_3 := \{a^i b a^i : i \in \mathbb{N}\}$

(d) $L_4 := \{a a^{i \cdot i} : i \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Für jede Signatur σ ohne Funktionssymbole sei die Sprache KBA_σ der *Konjunktiven Booleschen σ-Anfragen* die Menge der Wörter über dem Alphabet $A := \sigma \cup \{\wedge, \doteq, (,)\} \cup \{, \}$, die rekursiv wie folgt definiert ist:

Basisregel: (B1) Für alle Konstantensymbole $\dot{a}_1, \dot{a}_2 \in \sigma$ ist $\dot{a}_1 \doteq \dot{a}_2$ in KBA_σ.

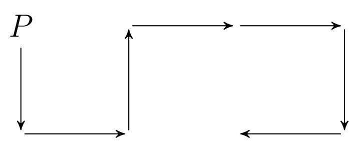
(B2) Für jedes Relationssymbol $\dot{R} \in \sigma$ und alle Konstantensymbole $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_{\mathrm{ar}(\dot{R})} \in \sigma$ ist $\dot{R}(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_{\mathrm{ar}(\dot{R})})$ in KBA_σ.

Rekursive Regel: (R) Sind w_1 und w_2 in KBA_σ, so ist auch $w_1 \wedge w_2$ in KBA_σ.

So ist bspw. das Wort $\dot{E}(\dot{c}, \dot{c})$ in $\mathsf{KBA}_{\sigma_{Graph} \cup \{\dot{c}\}}$. Sei nun $\sigma' := \{\dot{R}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$ mit dem zweistelligen Relationssymbol $\dot{R}$ und den Konstantensymbolen $\dot{x}, \dot{y}$ und $\dot{z}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = \mathsf{KBA}_{\sigma'}$ ist. Geben Sie außerdem einen Ableitungsbaum für das Wort $\dot{R}(\dot{x}, \dot{y}) \wedge \dot{R}(\dot{y}, \dot{z}) \wedge \dot{y} = \dot{z}$ entsprechend Ihrer Grammatik G an.

Aufgabe 4: (27 Punkte)

Batman ist mittlerweile genervt von den langweiligen Patrouillenfahrten, die er jede Nacht mit dem Batmobil durch Gotham City unternehmen muss. Doch ihm ist aufgefallen, dass durch die getönten Scheiben des Autos sowieso nicht zu erkennen ist, ob jemand darin sitzt oder nicht. So kommt er auf die Idee, das Batmobil bequem von seiner Villa aus fernzusteuern.



Die per Funk übermittelte Route für das Batmobil besteht aus einem Wort x über dem Alphabet $\Sigma := \{n, s, o, w\}$. Für jedes Zeichen in x gelesen von links nach rechts fährt das Batmobil genau einen Häuserblock bis zur nächsten Kreuzung in eine bestimmte Richtung: Bei n fährt es nach Norden, bei s nach Süden, bei o nach Osten und nach Westen bei w. (Das funktioniert gut, weil der Straßenplan von Gotham City regelmäßig wie Millimeterpapier ist.) Erhält das Batmobil beispielsweise das Wort *sonoosw* und startet bei Position P, so fährt es die in der nebenstehenden Abbildung gezeigte Route ab.

(a) Betrachten Sie die folgende Grammatik $G_1 = (T_1, N_1, S_1, P_1)$ mit $T_1 = \{w, o\}$, $N_1 = \{S, W, O\}$, $S_1 = S$ und

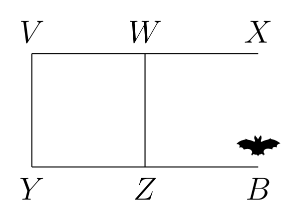
$$P_1 = \{\, S \to wO,\;\; S \to oW,\;\; S \to \varepsilon,\;\; W \to wS,\;\; W \to oWW,\;\; O \to oS,\;\; O \to wOO \,\}$$

(i) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Worte, ob es in $L(G_1)$ liegt. Wenn ja, geben Sie eine schrittweise Ableitung analog zu Beispiel 8.4. aus dem Skript für dieses Wort an; ansonsten begründen Sie, warum das Wort nicht zur Sprache gehört.

$w_1 = oW$ $\quad w_2 = woow$ $\quad w_3 = w$ $\quad w_4 = oowoww$

(ii) Beschreiben Sie, welche Sprache $L(G_1)$ von der Grammatik G_1 erzeugt wird. Was für ein Fahrverhalten zeigt das Batmobil, wenn es ein beliebiges Wort aus $L(G_1)$ als Routenanweisung erhält?

(b) Batman hat gemerkt, dass alle Ganoven in Gotham City in einem sehr kleinem Bereich wohnen und es ausreicht, dort das Batmobil herum fahren zu lassen, um sie einzuschüchtern. Dieser Bereich besteht aus den Orten V, W, X, Y und Z sowie aus Batmans Versteck, der Bathöhle B. Diese Orte sind durch Straßen wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt miteinander verbunden.



Batman braucht nun Fahrtrouten, die bei Position B beginnen, die eingezeichneten Straßen nicht verlassen und bei Position B enden. Mögliche Routen wären demnach *wo* oder *wnwsnoowso*, nicht aber *ns* oder *wwn*. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 an, die genau die Wörter über Σ erzeugt, die eine solche Fahrtroute beschreiben.

Hinweis: Nutzen Sie für jede der Positionen in der Abbildung ein eigenes Nichtterminalsymbol. Beschreiben Sie jede mögliche Richtung, die von jedem dieser Positionen aus jeweils möglich ist, durch eine Regel der Grammatik.