Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

18. Januar 2012

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 11

Abgabe: *bis 25. Januar 2012, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(24 Punkte)**

Sei $\sigma = \{\dot{R}, \dot{f}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{R}$, einem 3-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$ und dem Konstantensymbol $\dot{c}$.

(a) Bestimmen Sie für jede der folgenden FO[σ]-Formeln, welche Variablen frei und welche Variablen gebunden in der Formel vorkommen (ohne Begründung). Entscheiden Sie außerdem für jede der FO[σ]-Formeln, ob es sich um einen FO[σ]-Satz handelt.

(i) $\dot{R}(\dot{c}, \dot{c})$

(ii) $\forall v_7\, v_7 \doteq \dot{f}(v_7, v_6, v_7)$

(iii) $\exists v_3\, \exists v_2 \left(\dot{f}(v_2, v_3, v_2) \doteq \dot{c} \leftrightarrow \dot{R}(v_3, v_2)\right)$

(iv) $\exists v_4 \left(\forall v_5\, \dot{R}(v_5, v_4) \land \dot{R}(v_4, v_5)\right)$

(v) $\left(\exists v_3\, v_4 \doteq v_3 \land \forall v_4\, v_4 \doteq v_3\right)$

(vi) $\exists v_1\, \forall v_2\, \exists v_3\, \dot{f}(v_3, v_2, v_1) \doteq \dot{f}(\dot{c}, v_1, \dot{c})$

(vii) $(\exists v_0\, (\exists v_1\, (\exists v_2\, (\exists v_3\, (\exists v_4\, v_4 \doteq v_4 \lor v_4 \doteq v_3) \lor v_3 \doteq v_2) \lor v_2 \doteq v_1) \lor v_1 \doteq v_0) \lor v_0 \doteq v_0)$

(b) Betrachten Sie die σ-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \dot{R}^{\mathfrak{A}}, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$, wobei $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{A}} = 4$ und $\dot{R}^{\mathfrak{A}} = \{(1,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$ gilt. Weiterhin sei $\dot{f}^{\mathfrak{A}} : A \times A \times A \to A$ definiert durch

$$\dot{f}^{\mathfrak{A}}(x, y, z) := x + y + z - \max(x, y, z) - \min(x, y, z)$$

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \textsc{Var} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = 2,\ \beta(v_1) = 1,\ \beta(v_2) = 4 \text{ und } \beta(v_i) = 3 \text{ für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie für die folgenden FO[σ]-Formeln φ_1, φ_2 und φ_3 die Werte $[\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![\varphi_2]\!]^{\mathcal{I}}$ und $[\![\varphi_3]\!]^{\mathcal{I}}$ analog zu Beispiel 6.28 im Skript.

(i) $\varphi_1 := \dot{f}\left(v_0, \dot{f}(v_1, v_2, v_3), v_4\right) \doteq \dot{f}(v_5, \dot{c}, v_5)$

(ii) $\varphi_2 := \left(\neg\, \dot{R}(v_1, v_9) \lor \exists v_0\, \dot{R}(v_0, v_0)\right)$

(iii) $\varphi_3 := \forall v_0\, \exists v_1 \left(\dot{R}(v_0, v_1) \to \dot{f}(v_0, v_0, v_1) \doteq \dot{c}\right)$

Aufgabe 2: **(28 Punkte)**

Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathfrak{A}_{\text{Kino}}$ aus der Vorlesung.

(a) Geben Sie für die folgenden Anfragen jeweils eine Formel φ der Logik erster Stufe an, die die Anfrage beschreibt. Berechnen Sie jeweils auch die Relation $\varphi(\mathfrak{A}_{\text{Kino}})$.

(i) Geben Sie die Namen aller Kinos aus, die mindestens zwei Telefonnummern haben.

(ii) Geben Sie die Namen aller Kinos aus, in denen kein Film gezeigt wird.

(iii) Geben Sie alle Uhrzeiten aus, zu denen der Film Good Night and Good Luck läuft.

(iv) Geben Sie die Namen aller Kinos aus, die nach einem Film benannt sind.

(v) Geben Sie die Telefonnummern aller Kinos aus, in denen Filme von Bennet Miller oder Uwe Boll gezeigt werden.

(b) Berechnen Sie für jede der folgenden Formeln φ_i die Relation $\varphi_i(\mathfrak{A}_{\text{Kino}})$ und geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfrage durch die Formel φ_i beschrieben wird.

(i) $\varphi_1(x) = \exists x_{\text{S}} \exists x_{\text{R}} \exists x_{\text{T}_1} \exists x_{\text{T}_2} \Big(\dot{Filme}(x_{\text{T}_1}, x, x_{\text{S}}) \wedge \dot{Filme}(x_{\text{T}_2}, x_{\text{R}}, x) \Big)$

(ii) $\varphi_2(x_1, x_2) = \exists x_{\text{S}} \exists x_{\text{Z}} \Big(\dot{Filme}(x_1, x_2, x_S) \wedge \dot{Programm}(\text{'Babylon'}, x_1, x_{\text{Z}}) \Big)$

(iii)
$$\varphi_3(x) = \exists x_{\text{K}} \exists x_{\text{Z}} \Big(\dot{Programm}(x_{\text{K}}, x, x_{\text{Z}}) \wedge \forall y_{\text{K}} \forall y_{\text{Z}} \Big(\dot{Programm}(y_{\text{K}}, x, y_{\text{Z}}) \rightarrow y_{\text{Z}} \doteq x_{\text{Z}} \Big) \Big)$$

Aufgabe 3: (20 Punkte)

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(i) $\exists x \varphi \models \forall x \varphi$

(ii) $\neg \exists x \neg \varphi \equiv \forall x \varphi$

(iii) $(\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \models \forall x (\varphi \vee \psi)$

(iv) $\forall x (\varphi \vee \psi) \models (\forall x \varphi \vee \forall x \psi)$

(v) $\forall x (\varphi \vee \psi) \models (\exists x \varphi \vee \exists x \psi)$

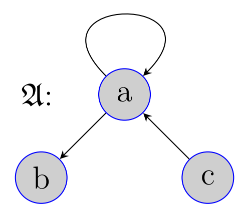
(vi) $(\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \equiv \forall x (\varphi \vee \psi)$

(b) Beweisen Sie, dass Ihre Antworten zu (iv) und (v) aus (a) korrekt sind.

Aufgabe 4: (28 Punkte)

Sei $\sigma_{Graph} := \{\dot{E}\}$ die Signatur aus Beispiel 6.8 mit einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{E}$ zur Modellierung von gerichteten Graphen (siehe dazu auch Beispiel 6.22).

(a) Betrachten Sie die σ_{Graph}-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$, die durch den Graphen in der nebenstehenden Abbildung repräsentiert wird. Geben Sie einen FO[σ_{Graph}]-Satz φ an, der die Struktur eindeutig beschreibt. D.h. es soll für alle σ_{Graph}-Strukturen $\mathfrak{B}$ gelten:

$\mathfrak{A}$:


$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B} \models \varphi$$

(b) Sei $\sigma := \sigma_{Graph} \cup \{\dot{g}\}$ eine Erweiterung von σ_{Graph} mit dem einstelligen Funktionssymbol $\dot{g}$. Geben Sie für jeden der folgenden $FO[\sigma]$-Sätze je eine σ-Struktur an, die die Formel erfüllt und eine, die die Formel nicht erfüllt.

(i) $\forall x \forall y \Big(\dot{E}(x, y) \leftrightarrow \dot{E}(y, x) \Big)$

(ii) $\forall x \forall y \Big(\big(\neg \dot{g}(y) \doteq \dot{g}(x) \leftrightarrow \dot{E}(x, y) \big) \vee \big(\dot{E}(x, y) \leftrightarrow \neg \dot{E}(y, x) \big) \Big)$

(c) Geben Sie für die FO[σ_{Graph}]-Formel

$$\varphi(x) := \forall y \Big(\dot{E}(x, y) \rightarrow \big(\exists z (\dot{E}(x, z) \wedge \dot{E}(y, z)) \big) \Big)$$

eine σ_{Graph}-Struktur $\mathfrak{A}$ und zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathfrak{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathfrak{A}, \beta_2)$ an, so dass $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \models \neg \varphi$ gilt.

(d) Entscheiden Sie, ob FO[σ_{Graph}]-Formeln φ und ψ mit freien Variablen x, y und z existieren, so dass für jeden gerichteten Graphen $\mathfrak{A} = (A, \dot{E}^{\mathfrak{A}})$ und jede zu φ und ψ passende Belegung β in $\mathfrak{A}$ gilt:

(i) $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \iff$ Es ex. in $\mathfrak{A}$ ein einfacher Weg von $\beta(x)$ über $\beta(y)$ nach $\beta(z)$ der Länge vier.

(ii) $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi \iff$ Es ex. in $\mathfrak{A}$ ein einfacher Weg von $\beta(x)$ über $\beta(y)$ nach $\beta(z)$.