Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

11. Januar 2012

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 18. Januar 2012, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

Sei $\sigma := \{\dot{F}, \dot{I}, \dot{M}, \dot{P}, \dot{Lzs}\}$ eine Signatur, wobei $\dot{F}$ ein 2-stelliges Relationssymbol, $\dot{I}, \dot{M}, \dot{P}$ jeweils 1-stellige Relationssymbole und $\dot{Lzs}$ ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur mit $\mathfrak{A} := (A, \dot{F}^{\mathfrak{A}}, \dot{I}^{\mathfrak{A}}, \dot{M}^{\mathfrak{A}}, \dot{P}^{\mathfrak{A}}, \dot{Lzs}^{\mathfrak{A}})$, in der A die Menge der Studierenden ist und $\dot{Lzs}^{\mathfrak{A}}$ den Langzeitstudenten aus A bezeichnet, also die Person aus A, die schon am längsten studiert. Außerdem gilt für alle x und y aus A:

- $(x, y) \in \dot{F}^{\mathfrak{A}} \iff x$ und y sind miteinander befreundet
- $x \in \dot{I}^{\mathfrak{A}} \iff x$ studiert Informatik
- $x \in \dot{M}^{\mathfrak{A}} \iff x$ studiert Mathematik
- $x \in \dot{P}^{\mathfrak{A}} \iff x$ studiert Physik

Beachten Sie, dass $\dot{F}^{\mathfrak{A}}$ eine symmetrische Relation darstellt und niemand mit sich selbst befreundet ist. Die FO[σ]-Formel $\exists x(\dot{I}(x) \wedge \dot{M}(x))$ sagt beispielsweise aus, dass es einen Studierenden gibt, der Informatik und Mathematik studiert.

(a) Geben Sie möglichst kurze FO[σ]-Formeln an, die in $\mathfrak{A}$ jeweils folgendes aussagen:

(i) Der Langzeitstudent studiert Mathematik.

(ii) Für jedes der Fächer Informatik, Mathematik und Physik gibt es jeweils einen Studierenden, der dieses Fach studiert.

(iii) Jeder Studierende der Informatik ist mit dem Langzeitstudenten befreundet.

(iv) Jeder Studierende der Physik ist mit einem Studierenden der Physik befreundet.

(b) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden FO[σ]-Formeln in $\mathfrak{A}$ aussagt:

(i) $\exists x \neg\Big(\big(\dot{I}(x) \vee \dot{M}(x)\big) \vee \dot{P}(x)\Big)$

(ii) $\forall x \forall y \Big(\big(\dot{M}(x) \wedge \dot{P}(y)\big) \rightarrow \neg\dot{F}(x, y)\Big)$

(iii) $\exists x \forall y \Big(\big(\dot{F}(x, y) \vee x \doteq y\big) \vee \exists z \big(\dot{F}(x, z) \wedge \dot{F}(z, y)\big)\Big)$

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{\dot{f}, \dot{Q}, \dot{R}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$, einem 2-stelligen Relationssymbol $\dot{Q}$, einem 3-stelligen Relationssymbol $\dot{R}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$.

(a) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es sich jeweils um einen σ-Term (gemäß Definition 6.13), um eine atomare σ-Formel bzw. um eine FO[σ]-Formel (gemäß Definition 6.19) handelt. Begründen Sie gegebenenfalls, warum ein Wort kein σ-Term, keine atomare σ-Formel bzw. keine FO[σ]-Formel darstellt.

(i) $(v_1 \vee v_2)$

(ii) $\dot{f}(\dot{f}(v_2))$

(iii) $\dot{Q}\big(\dot{f}(v_2), v_2, \dot{c}\big)$

(iv) $\dot{R}\big(\dot{f}(v_2), v_2, \dot{c}\big)$

(v) $\big(\dot{f}(v_9) \vee \dot{Q}(v_9, v_9)\big)$

(vi) $\exists v_7 \neg \dot{f}\Big(\dot{f}(\dot{f}(\dot{f}(v_7)))\Big) \doteq \dot{f}\Big(\dot{f}(v_7 \vee v_7)\Big)$

(vii) $\neg \forall v_9 \neg \dot{f}\Big(\dot{f}(\dot{f}(\dot{c}))\Big) \doteq \dot{f}(v_8)$

(viii) $\forall v_2 \exists v_3 \forall v_2 \Big(\dot{f}(v_1) \doteq \dot{c} \leftrightarrow \forall v_2 \Big(\dot{R}(\dot{f}(v_1), v_4, v_5) \wedge \dot{Q}(v_1, v_6)\Big)\Big)$

(b) Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathfrak{A} := (A, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{Q}^{\mathfrak{A}}, \dot{R}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$, $\mathfrak{B} := (B, \dot{f}^{\mathfrak{B}}, \dot{Q}^{\mathfrak{B}}, \dot{R}^{\mathfrak{B}}, \dot{c}^{\mathfrak{B}})$ und $\mathfrak{C} := (C, \dot{f}^{\mathfrak{C}}, \dot{Q}^{\mathfrak{C}}, \dot{R}^{\mathfrak{C}}, \dot{c}^{\mathfrak{C}})$ wobei

- $A := \{1,2,3,4,5\}$, $\dot{Q}^{\mathfrak{A}} := \{(3,3),(5,4),(1,1)\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{A}} := \{(2,2,4),(5,3,1)\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{A}} := 2$
- $B := \{v,w,x,y,z\}$, $\dot{Q}^{\mathfrak{B}} := \{(v,v),(z,y),(x,x)\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{B}} := \{(w,w,y),(z,x,v)\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{B}} := w$
- $C := \{a,b,c,d,e\}$, $\dot{Q}^{\mathfrak{C}} := \{(e,e),(c,c),(a,b)\}$, $\dot{R}^{\mathfrak{C}} := \{(a,c,e),(d,d,b)\}$, $\dot{c}^{\mathfrak{C}} := d$

und die Funktionen $\dot{f}^{\mathfrak{A}} \colon A \to A$, $\dot{f}^{\mathfrak{B}} \colon B \to B$ und $\dot{f}^{\mathfrak{C}} \colon C \to C$ definiert sind durch

x	1	2	3	4	5
$\dot{f}^{\mathfrak{A}}(x)$	2	1	2	5	4

x	v	w	x	y	z
$\dot{f}^{\mathfrak{B}}(x)$	w	v	z	x	y

x	a	b	c	d	e
$\dot{f}^{\mathfrak{C}}(x)$	b	a	d	e	d

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ und ob $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und begründen Sie, warum es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

Aufgabe 3: (18 Punkte)

Sei $\sigma := \{\dot{f}, \dot{c}\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol $\dot{f}$ und einem Konstantensymbol $\dot{c}$. Wir betrachten die σ-Struktur $\mathfrak{A} := (A, \dot{f}^{\mathfrak{A}}, \dot{c}^{\mathfrak{A}})$, wobei $A := \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}, \text{Echse}, \text{Spock}\}$ und $\dot{c}^{\mathfrak{A}} :=$ Spock. Der Wert $\dot{f}^{\mathfrak{A}}(x,y)$ für $x, y \in A$ findet sich in Zeile x und Spalte y der nebenstehenden Tabelle.[1]

$\dot{f}^{\mathfrak{A}}$	Stein	Schere	Papier	Echse	Spock
Stein	Stein	Stein	Papier	Stein	Spock
Schere	Stein	Schere	Schere	Schere	Spock
Papier	Papier	Schere	Papier	Echse	Papier
Echse	Stein	Schere	Echse	Echse	Echse
Spock	Spock	Spock	Papier	Echse	Spock

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta \colon \textsc{Var} \to A$, für die gilt:

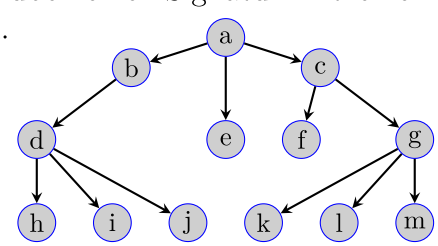
$$\beta(v_0) = \text{Stein},\ \beta(v_1) = \text{Spock},\ \beta(v_2) = \text{Schere},\ \text{ und } \beta(v_i) = \text{Papier} \ \text{ für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_3]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden σ-Terme:

(a) $t_1 := \dot{f}(v_0, \dot{c})$ **(b)** $t_2 := \dot{f}(v_1, \dot{f}(v_0, v_2))$ **(c)** $t_3 := \dot{f}(\dot{f}(\dot{f}(v_0, v_0), \dot{c}), \dot{f}(v_3, \dot{f}(v_4, v_5)))$

Aufgabe 4: (27 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen gerichtete Bäume durch Strukturen über einer Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol $\dot{Elternknoten}$ repräsentiert werden.



(a) Beschreiben Sie, wie ein gegebener gerichteter Baum $B = (V, E)$ mit $V \neq \emptyset$ durch eine Struktur über der Signatur $\sigma := \{\dot{Elternknoten}\}$ modelliert werden kann. Geben Sie außerdem die entsprechende Struktur für den nebenstehenden gerichteten Baum an.

(b) Geben Sie je eine FO[σ]-Formel $\varphi(x)$ an, die aussagt, dass der Knoten x

(i) ein Blatt ist,

(ii) die Wurzel ist,

(iii) ein innerer Knoten ist,

(iv) drei Kinder hat.

---

[1]Die Struktur $\mathfrak{A}$ spiegelt das Spiel „Stein, Schere, Papier, Echse, Spock“ wider, dass Rajesh und Sheldon in Folge 25 der Serie *The Big Bang Theory* spielen, um ihre Meinungsverschiedenheiten auszuräumen – allerdings ohne Erfolg.