Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

21. Dezember 2011

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2011/2012

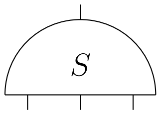
Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 11. Januar 2012, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

(a) Ein Schaltkreis mit n Eingängen und einem Ausgang ist ein elektronischer Baustein, der eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ berechnet. Dabei gilt für jede Komponente i der n Komponenten des Eingabetupels, dass sie genau dann 1 ist, falls am Schaltkreis am i-ten Eingang Strom anliegt, und der Funktionswert von f ist genau dann 1, falls am Ausgang Strom anliegt.

Wir betrachten den Schaltkreis S mit 3 Eingängen. Die Eingänge des Schaltkreises sind der Reihe nach von 1 bis 3 durchnummeriert. Über den Schaltkreis S ist nun folgendes bekannt:



Am Ausgang liegt Strom an, falls jede der folgenden drei Eigenschaften erfüllt ist:

(1.) Aus der Tatsache, dass an dem ersten Eingang genau dann Strom anliegt wenn am zweiten Eingang Strom anliegt, folgt die Tatsache, dass am dritten Eingang Strom anliegt,

(2.) Es gilt, am dritten Eingang liegt kein Strom an oder am zweiten Eingang liegt kein Strom an oder am ersten Eingang liegt Strom an.

(3.) Es gilt, am dritten Eingang liegt kein Strom an, oder falls am ersten Eingang Strom anliegt, dann auch am zweiten.

(i) Modellieren Sie das Verhalten des Schaltkreises S als aussagenlogische Formel φ, welche genau dann wahr ist, falls am Schaltkreis am Ausgang Strom anliegt. Benutzen Sie hierfür die drei atomaren Aussagen X_1, X_2 und X_3, wobei die atomare Aussage X_i genau dann erfüllt ist, falls am i-ten Eingang Strom anliegt. Weiterhin soll die Formel φ eine Konjunktion von drei Teilformeln φ_1, φ_2 und φ_3 sein, wobei φ_1 die erste Eigenschaft des Schaltkreises modelliert. φ_2 die zweite und φ_3 die dritte.

(ii) Stellen Sie eine Wahrheitstabelle für φ auf.

(iii) Welche Funktion berechnet der Schaltkreis? D.h., für welche Art von Eingaben ist die Ausgabe positiv bzw. liegt Strom am Ausgang an?

(b) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie außerdem folgendes für jede Formel an: Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel erfüllt. Falls die Formel nicht allgemeingültig ist, geben Sie eine zur Formel passende Belegung an, die die Formel *nicht* erfüllt.

(i) $\varphi = \big((X_1 \vee (X_2 \vee X_3)) \to (\neg X_1 \wedge (\neg X_2 \wedge \neg X_3))\big)$

(ii) $\psi = \big((X_1 \wedge (X_2 \wedge X_3)) \to (\neg X_1 \vee (\neg X_2 \vee \neg X_3))\big)$

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede **falsche** Antwort wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

(i) Eine aussagenlogische Formel φ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.

(ii) Zu jeder aussagenlogischen Formel φ existiert eine aussagenlogische Formel ψ, so dass φ allgemeingültig ist, genau dann wenn $(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi))$ allgemeingültig ist.

(iii) Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind genau dann äquivalent, wenn gilt $\mathbf{1} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

(d) Geben Sie eine zur Formel

$$\varphi \ := \ \big(X_1 \leftrightarrow (\neg X_2 \vee X_3)\big)$$

äquivalente aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform an.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

(a) Im Folgenden wird die Menge AT der *arithmetischen Terme mit den Variablen a, b und c* über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, c, +, -, \cdot, (,)\}$ rekursiv definiert:

Basisregel:

(B) Jede der Variablen a, b, c ist in AT.

Rekursive Regeln:

(R1) Ist w in AT, so ist auch $-w$ in AT.

(R2) Sind w_1 und w_2 in AT, so sind auch $(w_1 + w_2)$ und $(w_1 \cdot w_2)$ in AT.

(i) Welche der folgenden Wörter gehören zur Sprache AT, welche nicht? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.
Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede **falsche** Antwort wird ein Punkt **abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

(I.) $-a$	(III.) $(b + - - - - a)$	(V.) $(b \cdot (b + -a))$
(II.) $(a - (b \cdot a))$	(IV.) $(a + b + c)$	(VI.) $(b \cdot (b - +a))$

(ii) Für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichne $v(w)$ die Anzahl der Vorkommen der Symbole a, b und c in w und $o(w)$ die Anzahl der Vorkommen der Symbole $-$, $+$ und $\cdot$ in w. So gilt beispielsweise $v((a - (b \cdot a))) = 3$ und $o((a - (b \cdot a))) = 2$.
Beweisen Sie durch vollst. Induktion, dass für alle Wörter $w \in AT$ gilt: $v(w) \leq o(w)+1$.

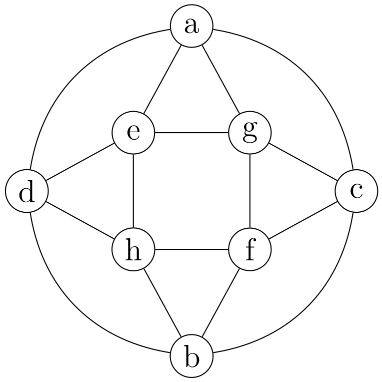
(b) Ein ungerichteter endlicher Graph $G = (V, E)$ wird genau dann *kubisch* genannt, wenn für alle seine Knoten $v \in V$ gilt: $\text{Grad}_G(v) = 3$.

(i) Geben Sie jeweils einen zusammenhängenden kubischen Graphen mit 4, 6 und 8 Knoten in graphischer Darstellung an.

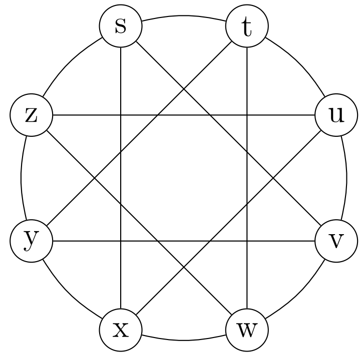
(ii) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit n gerade und $n \geq 4$ ein zusammenhängender kubischer Graph mit n Knoten existiert.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

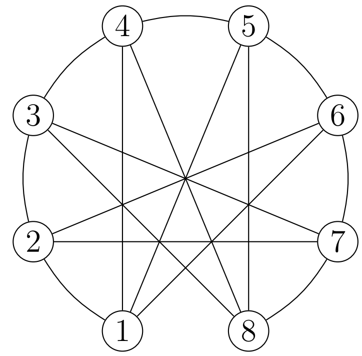
(a) Es seien die folgenden drei ungerichteten Graphen G_1, G_2 und G_3 gegeben.



G_1



G_2



G_3

- **(i)** Geben Sie für G_1, G_2 und G_3 jeweils einen Knoten maximalen Grades und einen Knoten minimalen Grades an.
- **(ii)** Geben Sie für G_1, G_2 und G_3 jeweils ein Matching maximaler Größe an.
- **(iii)** Enthalten die Graphen G_1, G_2 und G_3 jeweils einen Euler-Kreis?
- **(iv)** Enthalten die Graphen G_1, G_2 und G_3 jeweils einen Hamilton-Kreis?
- **(v)** Geben Sie für G_1, G_2 und G_3 jeweils eine konfliktfreie Knotenfärbung mit möglichst wenig verschiedenen Farben an. (Sie brauchen nicht zu begründen, warum die von Ihnen verwendete Anzahl von Farben jeweils minimal ist.)
- **(vi)** Gilt $G_1 \cong G_3$, gilt $G_2 \cong G_3$?
- **(vii)** Ist G_3 planar?

(b) Auf dem Weihnachtsmarkt von Großdorf sollen insgesamt 8 Stände rund um den Marktplatz arrangiert werden. Die 8 Stände setzen sich folgendermaßen zusammen:

- Ein Stand, in dem die traditionelle Weihnachtskrippe aufgebaut ist.
- Zwei Stände, an denen Kunsthandwerk verkauft wird: einer der beiden Stände ist die Töpferei, der andere bietet Holzschmuck aus dem Erzgebirge an.
- Zwei Glühweinstände; einer davon wird von Herrn Max, der andere von Frau Peters betrieben.
- Drei Essensstände; einer davon verkauft Crêpes, der andere Waffeln und der dritte Steaks vom Holzkohlegrill.

Bei der Platzierung der 8 Stände um den Marktplatz ist folgendes zu beachten: Neben der Weihnachtskrippe darf keiner der Essensstände platziert werden. Die Glühweinstände dürfen nicht nebeneinander stehen, außerdem darf kein Glühweinstand neben einem Essensstand stehen. Der Besitzer der Töpferei ist strenger Vegetarier und fordert deshalb, nicht neben dem Stand mit den Steaks zu stehen. Da weder der Crêpes-Stand noch der Holzkohlegrill mit Feuerlöschern ausgestattet sind, darf aus Brandschutzgründen keiner dieser beiden Stände neben dem Stand mit dem Holzschmuck stehen. Schließlich ist zu beachten, dass Herr Max darauf besteht, dass Glühwein aus Tongefäßen nicht schmecke und er darum mit der Töpferei im Streit liegt. Darum dürfen die entsprechenden Stände nicht nebeneinander stehen.

- **(i)** Stellen Sie den Konfliktgraph auf, in dem die Stände durch Knoten repräsentiert werden und eine Kante zwischen zwei Knoten anzeigt, dass die entsprechenden Stände nicht nebeneinander platziert werden können.

(ii) Geben Sie das Komplement des Konfliktgraphen an.

(iii) Geben Sie einen Hamilton-Kreis im Komplement des Konfliktgraphen an.

(iv) Geben Sie eine Platzierung der 8 Stände rund um den Marktplatz an, mit der alle zufrieden sind.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Es ist eine allgemein bekannte Tatsache, dass der Weihnachtsmann nicht jedem Kind genau das bringt, was es sich wünscht. Wir haben durch investigative Recherchen erfahren, dass die Wahrscheinlichkeit für die Weihnachtswunscherfüllung eines Kindes allein davon abhängig ist, ob der Wunsch des Kindes im Jahr zuvor erfüllt wurde. Darum lässt sich die Folge der Ereignisse Wunscherfüllung/Nicht-Wunscherfüllung für ein Kind über die Jahre hinweg als Markov-Kette modellieren. Diese Markov-Kette hat als Zustandsmenge die Zustände z_1 für *Weihnachtswunsch erfüllt* und z_2 für *Weihnachtswunsch nicht erfüllt* sowie die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{z_1,z_1} & p_{z_1,z_2} \\ p_{z_2,z_1} & p_{z_2,z_2} \end{pmatrix}.$$

Dabei gibt der Wert p_{z_i,z_j} die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nach dem Eintreten von Ereignis z_i an Weihnachten im darauf folgenden Jahr das Ereignis z_j eintritt.

Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $X^{(k)} = (X^{(k)}_{z_1}, X^{(k)}_{z_2})$ der Wunscherfüllung für ein Jahr $k \in \mathbb{N}$ bekannt, so kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wunscherfüllung im Jahr $k+1$ berechnet werden als $X^{(k+1)} = X^{(k)} \cdot P$.

(a) Natürlich benutzt der Weihnachtsmann für jedes Kind eine andere Übergangsmatrix. Wir betrachten die Übergangsmatrix für Bob, die ausdrückt, dass sich das Ereignis der Weihnachtswunscherfüllung (bzw. -nichterfüllung) mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 aus dem Vorjahr wiederholt. Für die Markov-Kette von Bobs Wunscherfüllung lautet die Übergangsmatrix also

$$P_B = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass die Markov-Kette für Bobs Wunscherfüllung damit beginnt, dass Bob seinen Wunsch erfüllt bekommt, d. h. es gelte $X^{(0)}_B = (1, 0)$.

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Bobs Wunscherfüllung in Jahr drei, d. h. berechnen Sie $X^{(3)}_B$.

(ii) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $X^{(k)}_B = \left(\frac{1}{2}(1 + 3^{-k}), \frac{1}{2}(1 - 3^{-k})\right)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) Wie verhält sich $X^{(k)}_B$, wenn k gegen unendlich geht?

(b) Es gibt Kinder, deren jeweilige Übergangsmatrix für ihre Weihnachtswunscherfüllung vorteilhafter ist als die von Bob. Als Beispiel für ein solches Kind betrachten wir Alice, deren Übergangsmatrix gegeben ist durch

$$P_A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 7/8 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Verteilung $X_A = (7/9, 2/9)$ eine stationäre Verteilung für die Wunscherfüllung von Alice ist, d. h. zeigen Sie, dass $X_A = X_A \cdot P_A$ ist.

(ii) Geben Sie eine stationäre Verteilung für die Wunscherfüllung von Bob in Teilaufgabe (a) an, d. h. geben Sie eine Verteilung X_B an mit $X_B \cdot P_B = X_B$.

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins neue Jahr!