Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

7. Dezember 2011

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2011/2012

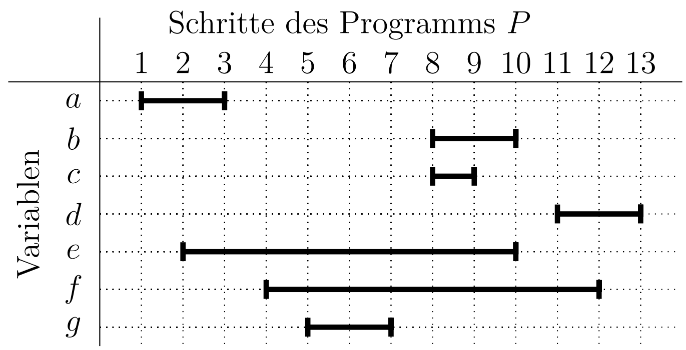
Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 14. Dezember 2011, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(20 Punkte)**

Die meisten Programmiersprachen vermitteln dem Programmierer den Eindruck, ihm ständen potentiell unbeschränkt viele Variablen zur Verfügung, auf die praktisch gleichzeitig zugegriffen werden könne. Allerdings muss bei der tatsächlichen Ausführung des Programms jede Variable, auf die zugegriffen wird, im Hauptspeicher verfügbar sein. Seine Größe ist durch die Hardware begrenzt. In der Entwurfsmethode des Hardware-Software-Codesigns, die bei Eingebetteten Systemen gebräuchlich ist, wird versucht, die Hardware aus Platz-, Energie- und Kostengründen so weit zu reduzieren, dass ein gegebenes Programm gerade noch darauf ausführbar ist.

Wir stellen uns ein Programm P vor, das die sieben Variablen $a, \dots, g$ benutzt, die jeweils eine Hauptspeicherzelle zur Speicherung benötigen. Die nebenstehende Abbildung gibt an, zu welchen Zeitpunkten der Ausführung von P welche Variablen im Hauptspeicher vorhanden sein müssen. So muss die Variable e beispielsweise in den Schritten 2 bis 10 von P im Hauptspeicher vorliegen. Zwei Variablen stehen im Konflikt miteinander, wenn sie nicht dieselbe Speicherzelle benutzen dürfen, da sie gleichzeitig im Hauptspeicher vorhanden sein müssen. Ziel der Aufgabe ist es, herauszufinden, wie viele Zellen der Hauptspeicher zur Ausführung von P haben muss, und in welche Zellen die Variablen im Verlaufe des Programms abgelegt werden können.



(a) Geben Sie den ungerichteten Konfliktgraphen an, der als Knotenmenge die Variablen besitzt und bei dem eine Kante für einen Konflikt zwischen zwei Variablen steht.

(b) Sei $G = (V, E)$ Ihr Konfliktgraph aus Aufgabenteil (a). Geben Sie eine konfliktfreie Knotenmarkierung $m : V \to \mathbb{N}$ an, die möglichst wenige verschiedene Markierungen verwendet, d. h. $|\text{Bild}(m)|$ soll minimal sein. Wie groß ist $\chi(G)$?

(c) Weisen Sie jeder Variablen a bis g genau eine der Hauptspeicherzellen zu, so dass Variablen, die zueinander in Konflikt stehen, nicht derselben Zelle zugeordnet sind und möglichst wenige verschiedene Speicherzellen benötigt werden.

Aufgabe 2: **(35 Punkte)**

Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

(a) Für jeden endlichen ungerichteten Baum $B = (V, E)$ mit $V \neq \emptyset$ gilt: B ist bipartit.

(b) Für jeden endlichen ungerichteten Graph G gibt es mindestens einen Spannbaum von G, falls G zusammenhängend ist. (Rückrichtung von Satz 4.48. aus dem Skript)

(c) **(i)** Für jeden endlichen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt: Bei jeder konfliktfreien Färbung von G mit $\chi(G)$ Farben muss es eine Menge von mindestens $\frac{|V|}{\chi(G)}$ Knoten in G geben, die mit der gleichen Farbe gefärbt sind.

(ii) Für jeden endlichen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und sein Komplement $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ gilt: $\chi(G) \cdot \chi(\tilde{G}) \geq |V|$

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien 2^n Münzen gegeben, die wir im Folgenden mit $M_1, \ldots, M_{2^n}$ bezeichnen. Genau eine der Münzen ist schwerer als alle anderen. Diese Münze lässt sich mit Hilfe einer Balkenwaage wie folgt finden:

(i.) Falls $n = 0$, ist die gesuchte Münze die einzige, die vorhanden ist.

(ii.) Ansonsten vergleiche das Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge $A := \{M_1, \ldots, M_{2^{n-1}}\}$ mit dem Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge $B := \{M_{2^{n-1}+1}, \ldots, M_{2^n}\}$. Ist das Gesamtgewicht von A größer als das von B, muss sich die gesuchte Münze in A befinden und das beschriebene Verfahren wird rekursiv auf die Menge A angewendet, andernfalls wird es rekursiv auf die Menge B angewendet.

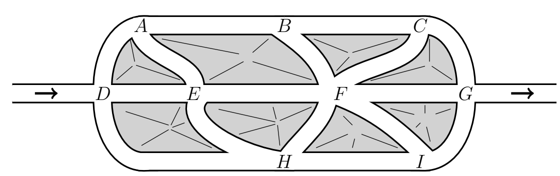
(a) Beschreiben Sie das Verfahren für $n = 2$ durch einen Entscheidungsbaum. Wählen Sie hierfür geeignete Kanten- und Knotenbeschriftungen.

(b) Ist der von Ihnen in Teilaufgabe (a) aufgestellte Entscheidungsbaum ein Binärbaum? Ist er ein vollständiger Binärbaum?

(c) Welchen Situationen im Entscheidungsprozess entsprechen die inneren Knoten des Baumes? Welcher Situation entspricht ein Blatt?

(d) Wie viele Wiegevorgänge müssen für 2^n Münzen mindestens durchgeführt werden? Wie viele Wiegevorgänge sind im schlimmsten Fall, also höchstens, nötig?

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**



Es ist mal wieder so weit: Der Duke muss ganz allein die Welt vor der atomaren Zerstörung durch die Aliens retten. Er braucht nur noch die ultimative Anti-Alien-Waffe, deren Einzelteile allerdings auf Gebirgskämmen eines bisher unbekannten Teils des Himalaja verteilt sind. Dieser Gebirgsteil wird durch die Abbildung skizziert: Die grauen Gebiete stellen Täler dar, die von den weißen Gebirgskämmen begrenzt werden. An den neun Gipfeln $A, \ldots, I$ treffen jeweils mehrere Gebirgskämme aufeinander. (So ist der Gipfel A beispielsweise mit den Gipfeln B, D und E verbunden.) Aus logistischen Gründen kann der Duke das Gebiet nur von Westen her betreten und nach Osten hin verlassen.

(a) Modellieren Sie das Gebiet *ohne* Zu- und Abgang als graphische Darstellung eines ungerichteten Graphen, dessen Knoten die Gipfel darstellen und zwei Knoten genau dann benachbart sind, wenn die entsprechenden Gipfel durch einen Gebirgskamm miteinander verbunden sind.

(b) Beim Durchqueren des Gebietes will der Duke, allein schon aus Gründen des Egos, jeden Gebirgskamm genau einmal benutzen. Ist das möglich? D.h., gibt es einen Euler-Weg in Ihrem Graphen aus Teilaufgabe (a), der in Knoten D startet und in Knoten G endet?

(c) Natürlich hat der Duke sein Jetpack dabei, welches es ihm erlaubt, von einem Gipfel zu einem anderen zu fliegen, ohne einen Gebirgskamm dabei zu benutzen. Wie oft mindestens und für welche Flüge muss der Duke sein Jetpack einsetzen, um bei seiner Tour von Gipfel D zu Gipfel G jeden Gebirgskamm genau einmal zu benutzen? Geben Sie zur Beantwortung dieser Frage einen Graphen an, der den Graphen aus Teilaufgabe (a) geeignet um die Flüge mit dem Jetpack erweitert.