Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

30. November 2011

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 6

Abgabe: *bis 7. Dezember 2011, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

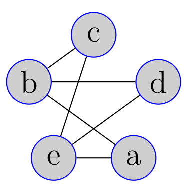
(a) Sei $V := \{x \in \mathbb{N}_{>0} : 1 \leq x \leq 7\}$. Geben Sie die folgenden Graphen G_1 und G_2 in graphischer Darstellung an. *Hinweis:* Beachten Sie dabei, ob es sich jeweils um einen gerichteten oder einen ungerichteten Graphen handelt.

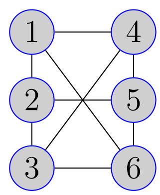
(i) $G_1 = (V, \{\{x, y\} : x, y \in V, x \text{ und } y \text{ sind prim}, x \neq y\})$

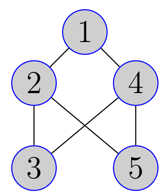
(ii) $G_2 = (V, \{(x, y) : x, y \in V, x = y + 1\} \cup \{(1, x) : x \in V\})$

Sind die Graphen G_1 und G_2 zusammenhängend bzw. stark zusammenhängend? Sind sie azyklisch?

(b) Seien G_3, G_4 und G_5 die folgenden Graphen:

G_3: 

G_4: 

G_5: 

(i) Geben Sie jeweils die Knoten- und Kantenmenge von G_3 und G_4 an.

(ii) Repräsentieren Sie den Graphen G_3 durch eine Adjazenzliste und G_4 durch eine Adjazenzmatrix.

(iii) Gelten die folgenden Aussagen? Belegen Sie Ihre Antworten auf geeignete Weise.

(I.) G_4 ist bipartit.
(II.) G_5 ist bipartit.
(III.) $G_3 \cong G_4$.
(IV.) $G_3 \cong G_5$.
(V.) G_3 ist ein induzierter Teilgraph von G_4.
(VI.) G_5 ist ein induzierter Teilgraph von G_4.

(iv) Geben Sie in G_3 einen nicht einfachen Weg an, der kein Kreis ist.

(v) Geben Sie in G_5 einen einfachen Kreis maximaler Länge an.

Aufgabe 2: **(20 Punkte)**

Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ sei der Graph $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ das *Komplement* von G, falls $\tilde{V} := V$ und $\tilde{E} := \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y, \{x, y\} \notin E\}$. Ein ungerichteter Graph heißt *selbskomplementär*, wenn er isomorph zu seinem Komplement ist.
Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

(a) Für je zwei ungerichtete Graphen G_1 und G_2 mit $G_1 \cong G_2$ gilt: Wenn G_1 zusammenhängend ist, so ist auch G_2 zusammenhängend.

(b) Für jeden ungerichteten Graphen G gilt: G oder $\tilde{G}$ ist zusammenhängend.

(c) Jeder selbstkomplementäre Graph ist zusammenhängend.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Es ist nun schon einige Monate her, dass in Düsseldorf das Finale des 56. Eurovision Song Contest stattfand. Doch erst jetzt wird bekannt, wie erbittert die Teilnehmer hinter den Kulissen um die Ausstattung ihrer jeweiligen Show gekämpft haben. Besonders zwischen den fünf Finalteilnehmern, die schon vorher qualifiziert waren – Amaury Vassili für Frankreich, Raphael Gualazzi für Italien, die Gruppe Blue für das Vereinigte Königreich, Lucía Pérez für Spanien und Lena für Deutschland – gab es Streit. Um seine Show herauszuputzen, konnte jeder der fünf Finalteilnehmer sich einen von fünf Bühneneffekten aussuchen. Zur Wahl standen eine Lasershow, eine Windmaschine, Feuerwerk, ein Flammenwerfer und eine Schneefallsimulation. Um die Langeweile der Zuschauer zu begrenzen, durfte jeder Bühneneffekt nur höchstens einmal benutzt werden. Allerdings hatten alle Musiker ganz eigene Abneigungen gegen bestimmte Bühneneffekte, die sich im Einzelnen folgendermaßen darstellten:

- Blue mag keine Lasershow.
- Raphael kann die Lasershow und die Schneefallsimulation nicht leiden.
- Auch Lucía lehnt die Schneefallsimulation ab, ebenso wie das Feuerwerk.
- Amaury missfallen das Feuerwerk, die Schneefallsimulation und der Flammenwerfer.
- Lena hat eine Abneigung gegen alles, was keine Windmaschine ist.

(a) Stellen Sie den Konfliktgraphen als *ungerichteten* Graphen auf, dessen Knotenmenge die Musiker und die Bühneneffekte repräsentiert. Eine Kante in diesem Graphen zwischen Musiker A und Effekt B soll dafür stehen, dass A den Effekt B nicht nutzen will.

(b) Geben Sie auf der Grundlage Ihres Konfliktgraphen einen *ungerichteten* „Zufriedenheitsgraphen“ mit der gleichen Knotenmenge an. Eine Kante in diesem „Zufriedenheitsgraphen“ zwischen Musiker A und Effekt B soll bedeuten, dass A mit B zufrieden wäre.

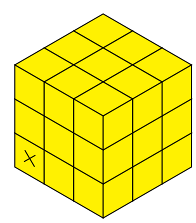
(c) Geben sie ein Matching maximaler Größe in Ihrem „Zufriedenheitsgraphen“ an.

(d) Geben Sie eine Zuordnung zwischen Bühneneffekten und Musikern an, so dass jeder Musiker genau einen Effekt erhält, jeder Effekt genau einmal zugeordnet wird und alle Musiker mit ihrer Zuordnung zufrieden sind.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

(a) Sei $G = (V, E)$ ein endlicher bipartiter Graph mit den Bipartitionsklassen V_1 und V_2, d.h. jede Kante von E hat einen Endknoten in V_1 und einen in V_2, außerdem ist $V = V_1 \dot\cup V_2$. Beweisen Sie die folgende Aussage: Falls $|V_1| > |V_2|$, so kann es keinen Hamilton-Weg in G geben, der in $|V_2|$ endet.

(b) Es sei ein Käsewürfel gegeben, der in $3 \times 3 \times 3$ kleinere Teilwürfel wie in der nebenstehenden Abbildung unterteilt ist. Zwei Teilwürfel sind *benachbart*, wenn sie sich entlang einer Fläche berühren. So ist beispielsweise der mit einem Kreuz markierte Teilwürfel mit 3 Teilwürfeln benachbart. Weiterhin sei eine Maus gegeben, die das Ziel hat, den großen Käsewürfel vollständig zu verspeisen. Sie kann dabei nur schrittweise vorgehen, indem sie in jedem Schritt einen Teilwürfel komplett verspeist und im nächsten Schritt mit einem Teilwürfel fortfährt, der mit dem gerade verspeisten Teilwürfel benachbart ist. Außerdem macht die Maus keinen Schritt, ohne einen Teilwürfel zu fressen und natürlich kann jeder Teilwürfel nur genau einmal gefressen werden.[1]



Kann die Maus bei dem markierten Teilwürfel starten und alle Teilwürfel so verspeisen, dass sie als Letztes den Teilwürfel in der Mitte des Kasewürfels frisst? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist. (Sie können dafür die Aussage aus Teilaufgabe (a) benutzen, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.)

[1] Es ist noch zu erwähnen, dass sich die ganze Situation in der Schwerelosigkeit abspielt, d.h. die Maus kann sich in jede Richtung fressen und es besteht auch nicht die Gefahr, dass der Würfel umkippt oder herunterfällt, wenn die untere Ebene von Teilwürfeln teilweise oder komplett gefressen ist.