Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

23. November 2011

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 5

Abgabe: *bis 30. November 2011, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(35 Punkte)**

(a) Entscheiden Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln, ob sie jeweils erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel eine erfüllende Belegung, für jede nicht allgemeingültige Formel eine nicht erfüllende Belegung an.

(i) $((\mathbf{1} \wedge V_0) \vee \mathbf{0})$

(ii) $((\mathbf{0} \rightarrow (\neg V_0 \vee \neg V_1)) \leftrightarrow \mathbf{0})$

(iii) $((V_0 \wedge V_1) \rightarrow (V_0 \vee V_1))$

(iv) $((V_0 \vee V_1) \rightarrow (V_0 \wedge V_1))$

(v) $\psi_n := \bigwedge_{i=1}^{n} (V_i \rightarrow \neg V_{2i})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

(b) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist *durch 3 teilbar*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 3 \cdot m$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n \;:=\; \begin{cases} (V_n \leftrightarrow \neg V_{n+1}), & \text{falls } n \text{ durch 3 teilbar ist} \\ ((V_n \leftrightarrow V_{n+1}) \leftrightarrow V_{n+2}), & \text{falls } n \text{ nicht durch 3 teilbar ist.} \end{cases}$$

Es ist also beispw. $\varphi_1 = ((V_1 \leftrightarrow V_2) \leftrightarrow V_3)$, $\varphi_2 = ((V_2 \leftrightarrow V_3) \leftrightarrow V_4)$, $\varphi_3 = (V_3 \leftrightarrow \neg V_4)$, $\varphi_4 = ((V_4 \leftrightarrow V_5) \leftrightarrow V_6)$, $\varphi_5 = ((V_5 \leftrightarrow V_6) \leftrightarrow V_7)$ und $\varphi_6 = (V_6 \leftrightarrow \neg V_7)$.

Geben Sie eine Belegung $\mathcal{B}\colon \textsc{Avar} \rightarrow \{0,1\}$ an, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $\mathcal{B}$ erfüllt φ_n.

(c) Die Menge AL ist nach Definition 3.3 die Menge aller syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln. Sei $B := \text{Abb}(\textsc{Avar}, \{0,1\})$ die Menge aller möglichen Funktionen $\mathcal{B} : \textsc{Avar} \rightarrow \{0,1\}$.

Außerdem definieren wir für jedes $\mathcal{B} \in B$ die Menge $\text{AL}^0_{\mathcal{B}} := \{\varphi \in \text{AL} : [\![\varphi]\!]^{\mathcal{B}} = 0\}$.

Gelten die folgenden Aussagen? Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(i) $\bigcap_{\mathcal{B} \in B} \text{AL}^0_{\mathcal{B}} = \emptyset$

(ii) $\bigcup_{\mathcal{B} \in B} \text{AL}^0_{\mathcal{B}} = \text{AL}$

(iii) Es ex. ein $\mathcal{B} \in B$, s.d. die Menge $\text{AL}^0_{\mathcal{B}}$ endlich ist.

Aufgabe 2: **(20 Punkte)**

Es sei $\varphi := (\neg(V_1 \leftrightarrow V_2) \wedge (\neg V_3 \vee V_1))$

(a) Wandeln Sie φ mittels Wahrheitstabelle in eine äquivalente aussagenlogische Formel φ' in DNF um.

(b) Wenden Sie den Algorithmus 3.39 aus dem Skript an, um eine zu φ äquivalente aussagenlogische Formel φ'' in KNF zu berechnen.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Um sich von der Konkurrenz abzuheben, hat das Sandwich-Restaurant *Downroad* sich auf die Belieferung von Logikern spezialisiert. Allerdings geben diese Kunden ihre Bestellungen teilweise auf recht eigenwillige Weise ab. Um zu testen, ob neue Stellenbewerber bei Downroad mit dieser Art von Bestellungen umgehen können, wird ein Test bei jedem der Bewerber durchgeführt. Stellen Sie sich vor, Sie bewerben sich auf einen Job bei Downroad und müssen folgenden Test lösen:

Ein Kunde gibt seine Bestellung in Form der folgenden Bedingungen auf:

- Wenn das Sandwich-Brot nicht getoastet ist, soll zusätzlich ein Cookie mitgeliefert werden.
- Wenn das Sandwich keinen Extra-Käse enthält, soll kein Cookie mitgeliefert werden.
- Wenn das Sandwich-Brot getoastet ist, so enthält das Sandwich Extra-Käse oder keine Jalapeños.
- Wenn das Sandwich keinen Extra-Käse und keine Jalapeños enthält, so ist es auch nicht getoastet.

(a) Zerlegen Sie den obigen Text in atomare Aussagen und geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die alle Äußerungen des Kunden repräsentiert.

Betrachten Sie nun die nachfolgenden Aussagen:

- Das Sandwich enthält Extra-Käse.
- Es wird genau dann ein Cookie mitgeliefert, wenn auch Jalapeños auf dem Sandwich sind.
- Wenn Jalapeños auf dem Sandwich sind, dann wird zusätzlich ein Cookie mitgeliefert oder das Sandwich-Brot ist getoastet.
- Das Sandwich enthält Extra-Käse und zusätzlich gilt, dass ein Cookie mitgeliefert wird oder das Sandwich getoastet ist.

(b) Geben Sie für jede der vier Aussagen eine aussagenlogische Formel an, die die Aussage repräsentiert.

(c) Entscheiden Sie für jede der vier aussagenlogischen Formeln aus (b), ob sie aus der Formel φ in (a) folgt und ob sie semantisch äquivalent dazu ist.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Die Menge AL_{pos} sei die Menge der Wörter über dem Alphabet $A = \textsc{Avar} \cup \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \wedge, \vee, (,), \}$, die rekursiv wie folgt definiert ist:

Basisregel:	(B)	Für jede Variable $X \in \textsc{Avar}$ gilt: $X \in \mathrm{AL}_{pos}$.
Rekursive Regeln:	(R1)	Ist $\varphi \in \mathrm{AL}_{pos}$, so ist auch $(\varphi \vee \mathbf{0}) \in \mathrm{AL}_{pos}$.
	(R2)	Ist $\varphi \in \mathrm{AL}_{pos}$, so ist auch $(\varphi \wedge \mathbf{1}) \in \mathrm{AL}_{pos}$.
	(R3)	Sind $\varphi \in \mathrm{AL}_{pos}$ und $\psi \in \mathrm{AL}_{pos}$, so ist auch $(\varphi \vee \psi) \in \mathrm{AL}_{pos}$.
	(R4)	Sind $\varphi \in \mathrm{AL}_{pos}$ und $\psi \in \mathrm{AL}_{pos}$, so ist auch $(\varphi \wedge \psi) \in \mathrm{AL}_{pos}$.

Offenbar ist jedes Wort der Sprache AL_{pos} eine aussagenlogische Formel, es gilt also $\mathrm{AL}_{pos} \subseteq \mathrm{AL}$. Zeigen Sie durch Induktion über den Aufbau von AL_{pos}, dass jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}_{pos}$ erfüllbar ist.