

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 4

Abgabe: bis 23. November 2011, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)

Aufgabe 1: (18 Punkte)

Welche der folgenden Wörter gehören gemäß der Definition 3.3 zur Sprache AL? Welche gehören nicht dazu? Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------|--|
| (a) V_{42} | (d) $(V_1 \rightarrow V_2)$ | (g) $(V_1 \rightarrow V_2) \rightarrow V_3$ |
| (b) $(\mathbf{0} \wedge \mathbf{1})$ | (e) $\neg\neg\neg\neg V_4$ | (h) $((V_1 \rightarrow V_2) \wedge (V_1 \leftarrow V_2))$ |
| (c) $(\mathbf{1} \vee \mathbf{2})$ | (f) $(V_1 \neq V_2)$ | (i) $(V_1 \wedge V_2)$ gdw. $\neg(\neg V_1 \vee \neg V_2)$ |

Aufgabe 2: (28 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Wert $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{B}}$ der aussagenlogischen Formel

$$\varphi := ((V_1 \rightarrow \neg V_2) \leftrightarrow (\neg V_3 \wedge \mathbf{1}))$$

unter der Belegung $\mathcal{B} : \text{Var}(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$\mathcal{B}(V_1) = 0, \quad \mathcal{B}(V_2) = 0, \quad \mathcal{B}(V_3) = 1$$

in nachvollziehbaren Schritten, d.h. analog zu Bsp. 3.10 aus der Vorlesung.

- (b) Gegeben sei die folgende aussagenlogische Formel

$$\psi := (V_3 \vee ((\neg V_1 \vee V_2) \rightarrow (V_2 \wedge \neg V_3)))$$

- (i) Beweisen Sie, dass ψ zur Menge AL gehört (gemäß Def. 3.3).
- (ii) Geben Sie $\text{Var}(\psi)$ an.
- (iii) Geben Sie den Syntaxbaum der Formel ψ an.
- (iv) Ist die Formel erfüllbar, ist sie unerfüllbar, ist sie allgemeingültig? Beweisen Sie, dass Ihre Antworten korrekt sind.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

- (a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, so dass $\text{Var}(\varphi) = \{V_0, V_1, V_2\}$ und für alle Belegungen $\mathcal{B}_1 : \text{Var}(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$ und $\mathcal{B}_2 : \text{Var}(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$ gilt:

Unterscheiden sich die Wahrheitswerte, die \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 den Variablen in $\text{Var}(\varphi)$ zuordnen in genau einer der Variablen V_0, V_1 oder V_2 , so gilt $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{B}_1} \neq \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{B}_2}$.

- (b) Von Menschen, die auf den Mond geflogen sind, kann man getrost sagen, sie seien berühmt. Lady Gaga ist unseres Wissens nicht auf den Mond geflogen und dennoch gibt es Menschen, die behaupten, sie sei berühmt. Untersuchen Sie im Folgenden, ob hier ein logischer Widerspruch vorliegt.

Stellen Sie dazu eine aussagenlogische Formel φ auf, die aussagt: Falls Lady Gaga zum Mond geflogen ist, ist sie berühmt und außerdem soll gleichzeitig gelten, dass sie nicht zum Mond geflogen ist und dass sie berühmt ist. Benutzen Sie dazu die atomaren Aussagen M (Lady Gaga ist zum Mond geflogen) und B (Lady Gaga ist berühmt). Untersuchen Sie nun, ob φ einen logischen Widerspruch ausdrückt oder ob Situationen existieren, in denen die Formel eine wahre Aussage repräsentiert.

Aufgabe 4:

(29 Punkte)

Es ist ein bisher gut gehütetes Geheimnis, dass Lummerland Teil der Euro-Zone ist. Aber ähnlich wie bei anderen Ländern auch haben die Turbulenzen an den Finanzmärkten den Staatshaushalt Lummerlands in arge Bedrängnis gebracht. Die Situation ist so ernst, dass Staatsoberhaupt König Alfons der Viertel-vor-Zwölfte die Europäische Zentralbank EZB um einen Kredit bitten muss. Doch die EZB ist streng und vergibt den Kredit nur, wenn die folgenden Anforderungen erfüllt sind:

- I: Wenn die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden, müssen die Banken stärker kontrolliert werden.
- II: Wenn Staatseigentum verkauft wird oder die Steuern gesenkt werden, dann dürfen die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden.
- III: Die Banken werden genau dann stärker kontrolliert, wenn die Ausgaben für Bildung erhöht werden und die Steuern nicht gesenkt werden.

- (a) Geben Sie für jede der Anforderungen I, II und III eine aussagenlogische Formel an, die die jeweilige Anforderung widerspiegelt (ähnlich zu Beispiel 3.16 und 3.17 im Skript). Benutzen Sie dafür die atomaren Aussagen S (die Steuern werden gesenkt), B (die Ausgaben für Bildung werden erhöht), V (Staatseigentum wird verkauft) und K (die Banken werden stärker kontrolliert).
- (b) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel φ auf, die die atomaren Aussagen S , B , V und K benutzt und die widerspiegelt, dass alle Anforderungen gleichzeitig erfüllt sein müssen.
- (c) Geben Sie für Ihre Formel φ aus (b) eine Belegung an, die besagt, dass die Steuern gesenkt werden, die Ausgaben für Bildung sich nicht erhöhen, Staatseigentum verkauft wird und die Banken stärker kontrolliert werden. Erfüllt diese Belegung die Formel φ ?
- (d) Welche Maßnahmen genau muss König Alfons der Viertel-vor-Zwölfte aus den Möglichkeiten Steuersenkung, Bildungsausgabenerhöhung, Verkauf des Staatseigentums und Verstärkung der Bankenkontrolle treffen und welche muss er unterlassen, um allen Anforderungen der EZB gerecht zu werden? Überlegen Sie sich dazu anhand einer Wahrheitstafel, welche Belegungen die Formel φ aus (b) erfüllen.