Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

9. November 2011

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2011/2012

Übungsblatt 3

Abgabe: *bis 16. November 2011, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)*

Aufgabe 1: **(15 Punkte)**

Es seien m endliche Mengen $M_1, \ldots, M_m$ für ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ gegeben. Beweisen Sie die folgende Aussage:

> Falls die Summe der Kardinalitäten der Mengen $M_1, \ldots, M_m$ größer als $n \in \mathbb{N}$ ist, so existiert eine Menge $M \in \{M_1, \ldots, M_m\}$, deren Kardinalität größer als $\frac{n}{m}$ ist.

Aufgabe 2: **(30 Punkte)**

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass folgendes gilt:

(i) $\prod_{i=2}^{n}(1 - \frac{1}{i}) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

(ii) $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$.

(b) Sei $G(n)$ ein Gitter bestehend aus einer Zeile und n Spalten. Formal definieren wir $G(n)$ als Menge von Kreuzungspunkten (x, y) in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und Linien, die diese Punkte verbinden, und zwar wie folgt: Sei $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq 1\}$ die Menge von Kreuzungspunkten von $G(n)$. Zwischen je zwei Kreuzungspunkten k_1 und k_2 verläuft eine Linie genau dann, wenn sich k_1 und k_2 in genau einer Koordinate um genau den Betrag eins unterscheiden.

Sei $R(n)$ die Anzahl der verschiedenen Rechtecke mit nicht-leerem Flächeninhalt, die ins Gitter $G(n)$ so gezeichnet werden können, dass jedes Rechteck sich aus Linien von $G(n)$ zusammensetzt. Die folgende Abbildung zeigt alle möglichen Rechtecke, die in $G(3)$ gezeichnet werden können. Insbesondere ist $R(3) = 6$.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass f.a. $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $R(n) = n(n+1)/2$.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Betrachten Sie die beiden folgenden Algorithmen, welche jeweils überprüfen, ob ein Wort w in einem Tupel $t = (w_1, \ldots, w_{2^k})$ vorkommt. Dabei ist $k \in \mathbb{N}$, jedes w_i ist ein Wort, und die Komponenten des Tupels sind lexikographisch sortiert. Als Eingabe erhält jeder der beiden Algorithmen neben dem Tupel t das Wort w, welches er in t finden soll. Beide Algorithmen benötigen die Funktion $len(t)$, welche die Anzahl der Komponenten des Tupels zurückgibt. Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass jeder Vergleich zweier Wörter jeweils einen Elementarschritt benötigt.

Algo 1 (bei Eingabe eines Wortes w und eines Tupels t):

```
Wiederhole für jedes i von 1 bis len(t):
    Falls w_i = w dann:
        Ausgabe: „Wort w im Tupel gefunden.“; Programmende;
Ausgabe: „Wort w nicht im Tupel vorhanden.“;
```

Der Algorithmus benötigt bei Eingabe eines Wortes w und des Tupels t höchstens $g_1(k) = 3 \cdot 2^k + 1$ Schritte.

Ein alternativer Algorithmus, bei gleicher Eingabe, ist:

Algo 2 (bei Eingabe eines Wortes w und eines Tupels t):

```
Ende = len(t);
P(1, Ende);

Funktion P(a,b)
Falls b > a
    Mitte = (a+b-1)/2;
    Falls w <=_lex w_Mitte:        (d.h. falls w lexikographisch kleiner oder gleich w_Mitte)
        P(a,Mitte);
    sonst:
        P(Mitte+1,b);
sonst:
    Falls w = w_a:
        Ausgabe: „Wort w im Tupel gefunden.“;
    sonst:
        Ausgabe: „Wort w nicht im Tupel vorhanden.“;
```

Dieser Algorithmus benötigt für $k = 0$, also bei Eingabe eines Wortes w und eines Tupels t der Länge $2^0 = 1$ genau $g_2(0) = 5$ Schritte. Für $k > 0$ mit $k \in \mathbb{N}$ braucht der Algorithmus *Algo* 2 insgesamt höchstens $g_2(k) = 6 + g_2(k-1)$ Schritte.

(a) Welcher der beiden Algorithmen läuft im Allgemeinen schneller? D.h. welche der beiden Funktionen g_1 und g_2 liefert kleinere Funktionswerte?

(b) Beweisen Sie, dass Ihre Antwort aus (a) korrekt ist. D.h. falls Sie in (a) geantwortet haben, dass *Algo* i im Allgemeinen schneller als *Algo* j ist, dann finden Sie eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ und beweisen Sie per Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $g_i(n) < g_j(n)$.

Aufgabe 4: **(30 Punkte)**

Die Menge KL sei die rekursiv wie folgt definierte Teilmenge von $A^\star$ für $A = \{[,], \langle, \rangle\}$:

Basisregel:	(B)	Es gilt: $[\,] \in \mathrm{KL}$.
Rekursive Regeln:	(R1)	Ist $w \in \mathrm{KL}$, so ist auch $[w] \in \mathrm{KL}$.
	(R2)	Ist $w \in \mathrm{KL}$, so ist auch $\langle w \rangle \in \mathrm{KL}$.
	(R3)	Sind $w_1 \in \mathrm{KL}$ und $w_2 \in \mathrm{KL}$, so ist auch $w_1 w_2 \in \mathrm{KL}$.

(a) Welche der folgenden Aussagen gelten, welche gelten nicht?

(i) $[\langle[\,][\,]\rangle][\,] \in \mathrm{KL}$

(ii) $[\langle[\,]\langle\rangle\rangle] \in \mathrm{KL}$

(iii) $\varepsilon \in \mathrm{KL}$

(iv) $\varepsilon \in \mathrm{KL}^*$

(b) Sei $f : \mathrm{KL} \to \mathbb{N}$ mit $f(w) = |w|$ für alle $w \in \mathrm{KL}$.

Zeigen Sie durch Induktion über den Aufbau von KL, dass für alle $w \in \mathrm{KL}$ gilt:

$$f(w) \text{ ist gerade.}$$